

СЕНТЯБРЬ / ДЕКАБРЬ

ISSN 0130-2221

2015 · № 5-6

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

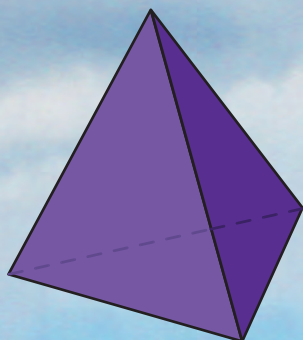
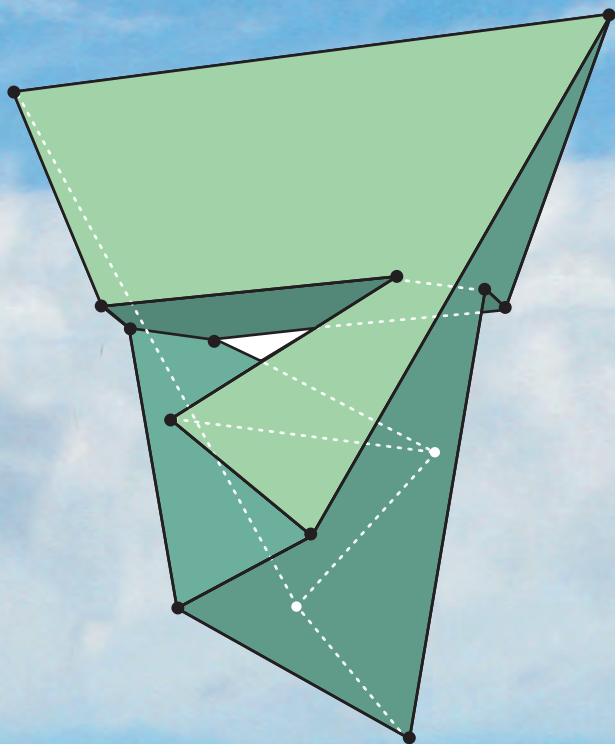
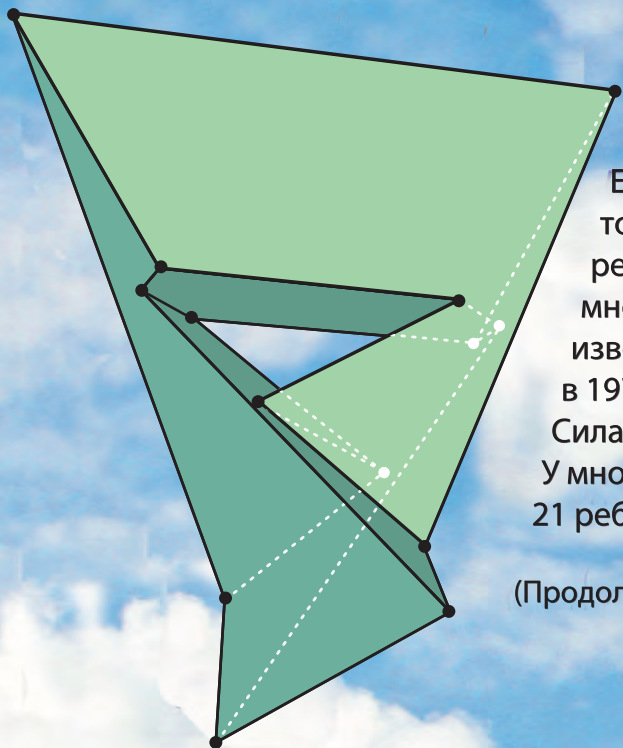




## МНОГОГРАННИК СИЛАШШИ

Если внимательно посмотреть на обычный тетраэдр, то можно заметить, что любая его грань имеет общее ребро с каждой из остальных граней. Есть ли еще многогранники с таким свойством? Оказывается, известен только один пример. Он был придуман в 1977 году венгерским математиком Лайошем Силашши (Lajos Szilassi) и потому носит его имя. У многогранника Силашши 7 шестиугольных граней, 21 ребро и 14 вершин.

(Продолжение на с. 26 внутри журнала)



# КВАНТ СЕНТЯБРЬ 2015 № 5-6 ДЕКАБРЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук	2 Экспериментальная физика высоких энергий. Э.Боос, Л.Дудко 8 Метод множителей Лагранжа. М.Горелов
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР А.Л.Семенов	ЗАДАЧНИК «КВАНТА» 15 Задачи М2396–М2405, Ф2403–Ф2412 17 Решения задач М2381–М2388, Ф2380–Ф2394 23 Симметрические многочлены и делимость на $p^s$ . И.Вайнштейн
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ Н.Н.Андреев, А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.А.Заславский, П.А.Кожевников (заместитель главного редактора), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)	«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ 27 Задачи 28 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8» 28 Как дятел Спятел планировал отпуск. К.Кохась
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев	ШКОЛА В «КВАНТЕ» 30 Гольфстрим, или Как Гренландия согревает Европу. А.Стасенко 31 Кулинарные исследования. Е.Соколов
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР И.К.Кикоин ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер	ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ 35 Поверхностное натяжение, капля и Вселенная. А.Стасенко 37 Угол смачивания и энергия взаимодействия молекул. С.Варламов
	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК 41 Перпендикуляры и еще один признак вписанного четыреугольника. Е.Бакаев, П.Кожевников, И.Яковлев
	ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА» 46 Камера-обскура в вашем доме. А.Андреев, А.Панов
	КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА» 48 Чертим кривые второго порядка!
	ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА 50 ВП по имени Центр масс. М.Бондаров
	РЕЦЕНЗИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ 56 «Математическая составляющая»
	ОЛИМПИАДЫ 58 Заключительный этап ХLI Всероссийской олимпиады школьников по математике 61 Заключительный этап ХLIX Всероссийской олимпиады школьников по физике 64 LVI Международная математическая олимпиада 65 XLVI Международная физическая олимпиада 70 XXII Международная олимпиада «Туймаада». Математика 71 XXII Международная олимпиада «Туймаада». Физика
	ИНФОРМАЦИЯ 73 Очередной набор в ВЗМШ 78 Заочной физико-технической школе при МФТИ – 50 лет
	82 Ответы, указания, решения 95 Напечатано в 2015 году
	НА ОБЛОЖКЕ I Иллюстрация к статье Э.Бооса, Л.Дудко II Коллекция головоломок III Шахматная страничка IV Прогулки с физикой

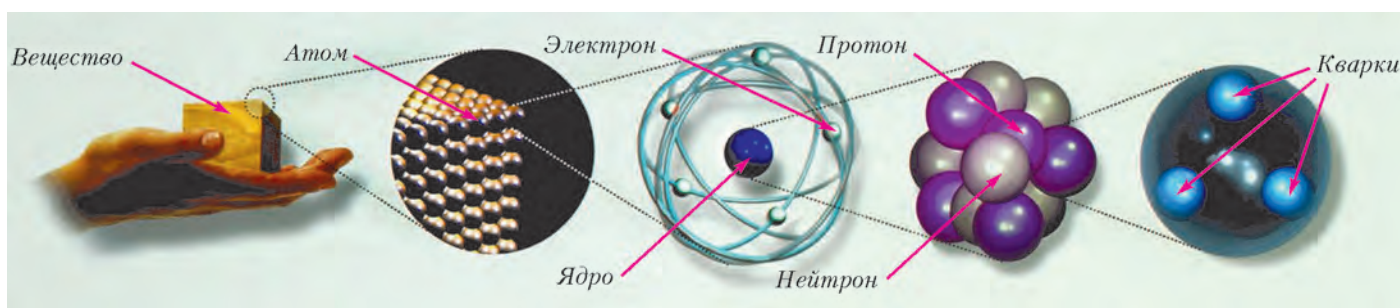


# Экспериментальная физика высоких энергий

Э.БООС, Л.ДУДКО

**П**ОНИМАНИЕ УСТРОЙСТВА ОКРУЖАЮЩЕГО мира и структуры материи издавна привлекало человеческую мысль. Древние философы развивали учения, некоторые из которых вполне напоминают современные воззрения. Демокрит (V век до н.э.) стал основателем атомистического подхода к строению

неожиданно большими углами, что свидетельствовало о наличии внутри атома очень плотной и маленькой структуры, в которой сконцентрирован весь его положительный электрический заряд. Дальнейшие опыты показали, что эта область имеет размер порядка  $10^{-13}$  см (1 Фм – один ферми). Результаты опытов противоре-



Структура материи

материи и ввел понятие атома как ее неделимой частицы. Много веков спустя химические опыты подтвердили существование веществ, не подверженных дальнейшему расщеплению методами химических реакций. В 1860 году на конгрессе химиков была принята концепция строения вещества из атомов и молекул.

Следующим ключевым этапом в понимании структуры материи стало случайное открытие явления радиоактивности Антуаном Беккерелем в 1896 году и подробное изучение этого явления Пьером и Марией Кюри. Способность некоторых веществ спонтанно испускать неизвестное излучение явилось указанием на составную структуру атомов. Дальнейшие исследования показали, что существует три основных вида естественной радиоактивности:  $\alpha$ -распад (испускаются тяжелые положительно заряженные частицы – ядра атома гелия),  $\beta$ -распад (испускаются легкие заряженные частицы – электроны или позитроны) и  $\gamma$ -распад (излучаются нейтральные частицы – фотоны).

Первая элементарная частица – электрон – была открыта Джозефом Томсоном в 1897 году в экспериментах по отклонениям катодных лучей в электрическом и магнитном полях. Однако подлинным началом современной физики элементарных частиц можно считать опыты Эрнеста Резерфорда и открытие ядра атома.

В 1911 году Резерфорд проводил исследования рассеяния  $\alpha$ -частиц на тонкой золотой фольге и впервые обнаружил, что некоторые частицы рассеиваются под

чили существовавшей тогда модели атома – как объекта с примерно равномерным распределением плотности и заряда – и потребовали пересмотра теоретических представлений о структуре материи. Эти результаты вместе с экспериментами по измерению спектральных линий атомов, спектра излучения «абсолютно черного» тела и по изучению фотоэффекта привели к необходимости квантового описания микромира и созданию соответствующей квантовой теории.

Современные методы исследования структуры материи принципиально похожи на экспериментальные методы, использованные Резерфордом. Энергичные частицы рассеиваются в веществе или в потоке других частиц, и по картине рассеянных частиц или по продуктам столкновений делается заключение об их внутренней структуре. Одним из основных принципов таких исследований является прямая связь энергии столкновений и масштаба расстояний, которые можно изучить при таких энергиях. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta p \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

задает связь между неопределенностью измерения импульса  $\Delta p$  рассеянной частицы и неопределенностью в измерении расстояния  $\Delta r$  (здесь  $\hbar = h/(2\pi)$  – постоянная Планка). Это соотношение дает величину предельно малого масштаба расстояний  $\Delta r_{\min}$ , в принципе доступного для исследования в процессе рассеяния, в котором максимально может быть получен переданный

импульс  $\Delta p_{\max}$ . Поскольку при высоких энергиях энергия частицы напрямую связана с ее импульсом:  $E = pc$ , то соотношение неопределенностей принимает вид

$$\Delta E \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar c}{2}.$$

Для количественного понимания связи между масштабом энергии взаимодействия и масштабами расстояний можно использовать известное соотношение между энергетическими и пространственными единицами:

$$\hbar c = 200 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}.$$

В принятой в физике высоких энергий системе единиц, где  $\hbar = c = 1$ , соотношение между энергетическими и пространственными единицами становится очень простым. Тогда легко понять, например, что наиболее мощный на сегодняшний день Большой адронный коллайдер (БАК), в котором сталкиваются протоны с энергией порядка 10 ТэВ, позволяет исследовать явления и изучать структуру микромира на масштабе расстояний порядка  $10^{-18}$  см.

Следующим ключевым понятием в экспериментах по физике элементарных частиц является понятие интенсивности столкновений. На современных ускорителях пучки частиц, разгоняемых до очень высоких энергий и до скоростей, близких к скорости света, состоят из частиц, собранных в сгустки, называемые банчами. Каждый такой сгусток характеризуется количеством в нем частиц, продольной длиной сгустка и площадью его поперечного сечения. Количество сгустков, прошедших точку столкновения за определенное время, определяется произведением частоты следования сгустков на этот интервал времени. Интенсивность столкновений, в случае встречных пучков на коллайдерах называемая светимостью, определяется как количество столкновений, происходящих за одну секунду на одном квадратном сантиметре площади поперечного сечения. Соответственно, чем больше частиц находится в сталкивающихся сгустках, чем больше частота их следования, а значит, и частота столкновений, чем меньше поперечная площадь сгустка, тем большей будет интенсивность (или светимость) столкновений на ускорителе или коллайдере.

Почему так важно иметь высокую светимость? Все процессы, проходящие в микромире, имеют вероятностную природу. При столкновении частиц те или иные возможные процессы, приводящие к рождению или уничтожению частиц, происходят с некоторыми вероятностями. Например, события с рассеянием ускоренных протонов на ядре мишени под различными углами имеют разные вероятности. В опыте Резерфорда наиболее интересными были редкие события рассеяния  $\alpha$ -частиц под большими углами, тогда как подавляющее большинство  $\alpha$ -частиц рассеивались под малыми углами, т.е. с незначительным отклонением от первоначального направления. Иными словами, в этом эксперименте исследовались события с малой вероятностью, поэтому для его успешного проведения источник излучения  $\alpha$ -частиц должен был иметь достаточно высокую интенсивность, чтобы редкие процессы рассеяния

на большие углы могли быть обнаружены на фоне частых событий рассеяния на малые углы. Аналогичная ситуация характерна и для экспериментов в физике элементарных частиц.

Для проведения экспериментов по изучению микромира существует несколько возможных источников энергичных частиц. Первые эксперименты были проведены с использованием веществ с естественной радиоактивностью, как, например, в упомянутом опыте Резерфорда. Энергия частиц, излучаемых из ядер атомов при естественной радиоактивности, может достигать единиц мегаэлектронвольт и соответствует энергии перехода между различными энергетическими состояниями ядра или разнице в энергии связей при изменении количества протонов или нейтронов в ядре. Такой энергии недостаточно для исследования структуры материи на масштабах меньше  $10^{-11}$  см, что примерно соответствует размеру ядра.

В 1912 году Виктор Гессе открыл космические лучи в экспериментах с ионизационной камерой, установленной на воздушном шаре. Было обнаружено, что ионизация возрастает при увеличении высоты полета, следовательно, ионизирующее излучение приходит из космоса, а не является естественным радиоактивным фоном Земли. Как результат этого открытия, стало понятно, что летящие из космоса высокоэнергичные частицы можно использовать в исследованиях по физике элементарных частиц. Космические лучи преимущественно состоят из протонов, а также из небольшого количества более тяжелых ядер. Диапазон их энергий достигает  $10^{11}$  ГэВ, что намного выше энергии, достижимой на наземных установках. В экспериментах с космическими лучами были открыты такие элементарные частицы, как позитрон (1932 г.), мюон (1937 г.), пион (1947 г.). Основными недостатками проведения экспериментов с космическими лучами является относительно низкая точность, обусловленная малой интенсивностью потоков космических лучей высоких энергий.

Самая точная информация об устройстве микромира элементарных частиц и их взаимодействиях получена в многочисленных экспериментах на ускорителях, в которых разогнанные частицы или ядра направляются на мишени, окруженные детектирующей аппаратурой, либо на коллайдерах, где ускоренные пучки частиц сталкиваются между собой внутри детекторов, позволяющих регистрировать продукты их взаимодействий. Ключевой принцип, лежащий в основе всех ускорительных экспериментов, состоит в том, что электрическое поле ускоряет заряженные частицы, а магнитное поле меняет направление их движения. Подбирая различные параметры электрического и магнитного полей, можно построить различные схемы циклического ускорения заряженных частиц. Эпоха ускорительных экспериментов началась в 1931 году с циклотрона Эрнеста Лоуренса и Милтона Ливингстона и генератора Роберта Ван де Граафа. С тех пор прорабатывались и создавались различные схемы ускорения заряженных частиц и различные ускорительные установки. В эксперимен-

тах на этих установках было открыто множество новых элементарных частиц, что привело к необходимости теоретического переосмысления полученных результатов.

В 1964 году Мюррей Гелл-Манн и Джордж Цвейг предложили кварковую модель для объяснения накопившихся фактов в ускорительных экспериментах и экспериментах с космическими лучами по рождению большого количества (порядка 100) новых сильно взаимодействующих частиц, получивших название «адроны». Для описания всех адронных состояний, известных в то время, оказалось достаточно введения трех кварков:  $u$  (up),  $d$  (down) и  $s$  (strange). Например, хорошо известные адроны протон и нейтрон, из которых состоят ядра окружающих нас атомов, образуются из трех кварков:  $uud$  для протона и  $ddu$  для нейтрона. Кроме того, чтобы правильно описывать спины и заряды наблюдаемых адронов, кварки должны иметь спин  $1/2$  и дробный электрический заряд – в единицах заряда электрона заряд  $u$ -кварка  $2/3$ , заряд  $d$ - и  $s$ -кварков  $-1/3$  каждый. Соответственно, и массы  $u$ - и  $d$ -кварков ожидалось порядка  $1/3$  массы протона, т.е. около 300 МэВ, а масса  $s$ -кварка – примерно 500 МэВ.

Однако, после обнаружения положительно и отрицательно заряженных дельта-резонансов, кварковый состав которых должен быть  $uuu$  и  $ddd$  соответственно, возникла серьезная проблема кварковой модели. Чтобы спин гиперона, в соответствии с данными экспериментов, равнялся  $1/2$ , два одинаковых по типу кварка должны находиться в одном и том же спиновом состоянии, что противоречит принципу Паули, согласно которому два фермиона (частицы с полуцелым спином) одного типа не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Решение этой проблемы было найдено в работах Николая Боголюбова, Бориса Струминского и Альберта Тавхелидзе, а затем Мойена Хана и Йоитиро Намбу, которые постулировали наличие у кварков нового квантового числа, получившего название «цвет». В дальнейшем эта гипотеза нашла блестящее подтверждение и привела к созданию квантовой теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики, составной части современной Стандартной модели, о которой пойдет речь дальше.

Введение кварковой гипотезы стало очередным шагом в установлении «минимальных кирпичиков», из которых состоит материя, по мере проникновения все глубже и глубже в ее структуру, от молекулы к атому, ядру, протону и нейтрону. Далее, обнаружение в 1974 году нового адрона с массой 3,1 ГэВ было понято как связанное состояние нового кварка, названного  $c$ -кварком (charm quark), и соответствующего ему антикварка. Ранее существование этого кварка было предсказано теоретически для интерпретации данных по распадам заряженных  $K$ -мезонов. К этому же времени были обнаружены и элементарные частицы другого класса, получившие название лептонов. Помимо хорошо известного электрона, были обнаружены электронное нейтрино ( $\nu_e$ ), мюон ( $\mu$ ) и соответствующее ему мюонное нейтрино ( $\nu_\mu$ ). Лептоны не участвуют в сильных

взаимодействиях, но подвержены электромагнитным взаимодействиям и участвуют в слабых радиоактивных распадах.

Возникла замечательная симметрия существования двух поколений кварков ( $u, d$ )( $c, s$ ) и двух поколений лептонов ( $\nu_e, e$ ), ( $\nu_\mu, \mu$ ). Но такая симметрия оказалась нарушенной, когда в 1976 году был обнаружен третий заряженный лептон – тау-лептон ( $\tau$ ), а в 1977 году был найден новый мезон –  $\Upsilon$  (ипсилон) с массой порядка 10 ГэВ, который был интерпретирован как связанное состояние нового кварка  $b$  (bottom) и соответствующего ему антикварка. Дальнейшие эксперименты показали, что  $b$ -кварк обладает спином  $1/2$  и зарядом  $-1/3$ , так же, как  $d$ - и  $s$ -кварки, при этом его масса порядка 5 ГэВ. Если предположить, что найденные тау-лептон и  $b$ -кварк принадлежат к новому третьему поколению, то для сохранения симметрии по аналогии с существующими парами двух поколений нужно было допустить, что существуют еще один кварк, аналогичный  $u$  и  $c$ , и еще одно нейтрино, аналогичное мюонному и электронному нейтрино. Обе эти частицы были обнаружены в дальнейших экспериментах. Тау-нейтрино ( $\nu_\tau$ ) было обнаружено в прямых наблюдениях в распадах тау-лептонов в 2000 году, а предсказанный шестой кварк, получивший название  $t$ -кварка (top quark), был пятью годами раньше обнаружен на коллайдере Теватрон. Отметим, что найденная масса топ-кварка (примерно 173 ГэВ) оказалась во много раз больше, чем те массы кварков, которые предполагались в кварковой модели Гелл-Манна и Цвейга. В отличие от ситуации со всеми предыдущими кварками, не было найдено никаких новых адронов, для интерпретации которых необходимо было бы ввести новый топ-кварк.

Открытие топ-кварка и тау-нейтрино завершило целостную картину фундаментальных частиц, составляющих материю и описываемых Стандартной моделью – СМ, являющейся современной теорией элементарных частиц и их взаимодействий: электромагнитного, слабого и сильного. Создание этой модели – одно из основных общих мировых интеллектуальных достижений за последние 60 лет, результат работы большого числа ученых, теоретиков и экспериментаторов. Ее создание было отмечено присуждением более десятка Нобелевских премий по физике.

В основе СМ лежит нескольких базовых идей, в частности, калибровочный характер взаимодействий и спонтанное нарушение электрослабой симметрии. Наличие симметрии в природе приводит к закону сохранения соответствующего заряда, и наоборот, существование сохраняющегося заряда говорит о наличии связанной с ним симметрии (теорема Э.Нётер). Так, в основе калибровочной теории электромагнитных взаимодействий лежит сохранение электрического заряда и соответствующая симметрия уравнений относительно калибровочных преобразований так называемой абелевой группы. Симметрия относительно калибровочных преобразований более сложного (неабелевого) типа позволила построить теорию сильных взаимодействий и с единой точки зрения описать электрослабые взаимодействия.



В СМ сильные и электрослабые фундаментальные взаимодействия носят обменный характер и осуществляются за счет переносчиков этих взаимодействий – так называемых промежуточных векторных бозонов, частиц со спином 1. Эти взаимодействия осуществляются между частицами материи, лептонами и кварками, являющимися фермионами со спином 1/2. Частицы материи представлены тремя поколениями кварков ( $u, d$ ), ( $c, s$ ), ( $t, b$ ), обладающих сильными, электромагнитными и слабыми зарядами, и тремя поколениями лептонов ( $\nu_e, e$ ), ( $\nu_\mu, \mu$ ), ( $\nu_\tau, \tau$ ), обладающих электромагнитными и слабыми зарядами. Причем электрически нейтральные нейтрино обладают только слабым зарядом и, соответственно, участвуют только в слабых взаимодействиях. К упомянутым шести частицам надо добавить их античастицы, и получается 12 частиц и античастиц, составляющих материю. Переносчиком электромагнитных взаимодействий является безмассовый фотон. Слабые взаимодействия осуществляются через обмен массивными  $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z^0$ -бозонами. Сильные взаимодействия происходят через обмен глюонами, являющимися переносчиками цветового заряда. Предсказанные  $W^+$ ,  $W^-$  и  $Z^0$ -бозоны были найдены на ускорителе в ЦЕРНе в 1983 году, что явилось триумфом Стандартной модели.

Наличие масс у обнаруженных в экспериментах калибровочных бозонов и фермионов удалось совместить с принципом калибровочной инвариантности взаимодействий, также хорошо подтвержденных экспериментально, с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии. Введенное дополнительно в теорию скалярное поле, поле Хиггса, также обладает калибровочно-инвариантными электрослабыми взаимодействиями, однако нетривиальный вакуум (конденсат) этого поля нарушает такую инвариантность. Нарушение симметрии за счет неинвариантности относительно этой симметрии основного вакуумного состояния носит название спонтанного нарушения. Частицы – возбуждения полей над вакуумом, низшим энергетическим состоянием, в которое спонтанно переходит система, – приобретают массу в результате взаимодействия с конденсатом скалярного поля Хиггса. Аналогичным образом приобретает массу и возникающая при спонтанном нарушении скалярная частица как возбуждение самого скалярного поля. Такой механизм приобретения массы получил название механизма Энглера–Браута–Хиггса, а возникающий скалярный (обладающий спином 0) бозон был назван бозоном Хиггса. Долгое время бозон Хиггса оставался последней неоткрытой частицей из предсказываемых Стандартной моделью. Но в 2012 году на Большом адронном коллайдере удалось зарегистрировать и это недостающее звено СМ. Открытие бозона Хиггса

Масса →	$\approx 2,3 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 1,275 \text{ ГэВ}/c^2$	$\approx 173,07 \text{ ГэВ}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ ГэВ}/c^2$
	$2/3$	$2/3$	$2/3$	0	0
Заряд →				1	0
Спин →	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0
	<b>u</b> Верхний	<b>c</b> Очарованный	<b>t</b> Истинный	<b>g</b> Глюон	<b>H</b> Бозон Хиггса
Кварки	$\approx 4,8 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 95 \text{ МэВ}/c^2$	$\approx 4,18 \text{ ГэВ}/c^2$	0	
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	<b>d</b> Нижний	<b>s</b> Странный	<b>b</b> Прелестный	<b>γ</b> Фотон	
Лептоны	$0,511 \text{ МэВ}/c^2$	$105,7 \text{ МэВ}/c^2$	$1,777 \text{ ГэВ}/c^2$	$91,2 \text{ ГэВ}/c^2$	
	$-1$	$-1$	$-1$	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	<b>e</b> Электрон	<b>μ</b> Мюон	<b>τ</b> Тау	<b>Z</b> Z-бозон	
	$< 2,2 \text{ эВ}/c^2$	$< 0,17 \text{ МэВ}/c^2$	$< 15,5 \text{ МэВ}/c^2$	$80,4 \text{ ГэВ}/c^2$	
	0	0	0	$\pm 1$	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	<b>ν<sub>e</sub></b> Электронное нейтрино	<b>ν<sub>μ</sub></b> Мюонное нейтрино	<b>ν<sub>τ</sub></b> Тау-нейтрино	<b>W</b> W-бозон	

Стандартная модель элементарных частиц, сведенная в таблицу

гса завершило целостную картину, предсказанную в рамках Стандартной модели. В 2013 году Франсуа Энглер и Питер Хиггс были удостоены Нобелевской премии за создание описанного выше механизма, приблизившего нас к пониманию возникновения масс фундаментальных частиц в природе.

Современные эксперименты в физике элементарных частиц можно разделить на несколько направлений. Основное из них – это ускорительные эксперименты, в которых частицы сталкиваются либо друг с другом, либо с фиксированными мишенями. Следующее направление – нейтринные эксперименты, требующие совершенно иных детекторов с большим количеством поглощающего вещества. Такие эксперименты используют нейтрино, рождающиеся на Солнце, в ядерных реакторах или при взаимодействии с мишенью пучка частиц из ускорителя. (Примерно аналогичное устройство имеют эксперименты по поиску частиц темной материи, в которых большое количество чистого поглощающего вещества размещают глубоко под землей с целью избавиться от фона космических лучей.) Следует отметить еще одно направление – астрофизические эксперименты и эксперименты с космическими лучами, которые до сих пор являются единственным источником частиц сверхвысоких энергий, недоступных в земных лабораториях. Основным инструментом изучения космических лучей является наземная сеть детекторов, покрывающая целые квадратные километры земной поверхности и регистрирующая широкие атмосферные ливни вторичных частиц, рождаемых при столкновении высокоэнергичных частиц из космоса с веществом атмосферы Земли.

Остановимся подробнее на основных современных экспериментах, проходящих на коллайдерах, сталкивающих протоны, лептоны или ядра в детекторах и изучающих продукты столкновений. Все исследуе-

мые массивные частицы имеют энергию значительно больше их массы покоя и летят почти со скоростью света, а их основной характеристикой является 4-мерный импульс в пространстве Минковского. Современные детекторы практически полностью покрывают области разлета частиц ( $4\pi$ -геометрия) и могут регистрировать почти все рождающиеся частицы. Мюонные камеры, расположенные на внешней части детектора, регистрируют мюоны и с высокой точностью определяют их энергию и направление движения. Электромагнитный калориметр регистрирует электроны и фотоны. Сильное магнитное поле в детекторе позволяет определять знак электрического заряда частицы по направлению отклонения, а величина отклонения характеризует энергию частицы. Адронный калориметр поглощает поток заряженных и нейтральных адронов, являющихся вторичными частицами, происходящими от фрагментации и адронизации кварков или глюонов, которые, в свою очередь, являются продуктами столкновения начальных частиц. Поток адронов, летящих в узком конусе, называют адронной струей. Пространственная локализация в узком конусе обусловлена большим импульсом частицы, породившей этот поток адронов. Выделенная в адронном калориметре энергия, локализованная в конусе струи, характеризует импульс начального кварка или глюона, а направление оси конуса характеризует направление вылета кварка или глюона, породившего эту адронную струю.

Несмотря на то, что кварки и глюоны в свободном состоянии не наблюдаются, адронные струи с высокой степенью точности характеризуют импульсы порождающих их кварков и глюонов. Более того, с высокой вероятностью можно идентифицировать струи, происходящие от высокоэнергичных  $b$ -кварков.  $V$ -мезоны, образующиеся в процессе фрагментации, имеют сравнительно большое время жизни и успевают пролететь значительное расстояние (порядка 1 см) до образования адронной струи. Это приводит к сдвигу вершины конуса образующейся адронной струи относительно вершины первичного столкновения, и величина этого сдвига характеризует вероятность идентификации рождения  $b$ -кварка в жестком процессе. Для такой идентификации  $b$ -кварков важно иметь вершинный детектор, позволяющий локализовать начало треков разлетающихся частиц. Наиболее тяжелый топ-кварк, имеющий массу, сравнимую с массой ядра золота, успевает распасться до образования связанных адронных состояний и хорошо идентифицируется по продуктам распада.

Нейтрино слишком слабо взаимодействуют с веществом и требуют значительной массы поглощающего вещества в детекторе для прямой регистрации. Например, нейтринная обсерватория «Ice Cube» использует кубический километр льда в Антарктиде в качестве поглощающего вещества детектора, а детекторы Байкальского глубоководного нейтринного телескопа пронизывают воду озера Байкал примерно на 1 километр. Такие детекторы невозможны в условиях коллайдерных экспериментов. Однако информацию о нейтрино можно получить и с помощью детекторов, ис-

пользуемых в коллайдерных экспериментах. Регистрируются все известные частицы, кроме нейтрино, а суммарный импульс в плоскости, поперечной направлению сталкивающихся пучков, должен быть равен нулю. Таким образом можно определить суммарный поперечный импульс всех нейтрино в событии как векторную сумму всех зарегистрированных в событии частиц, взятую с противоположным знаком. Эту величину называют недостающим, или потерянным импульсом. Массивные векторные и скалярные бозоны распадаются практически в точке первичного взаимодействия и хорошо регистрируются по продуктам распада. Дополнительные косвенные методы и информация о массах частиц, в распадах которых образовались нейтрино, позволяют с использованием измеренного недостающего импульса реконструировать и продольную компоненту импульса нейтрино.

При проведении эксперимента проверяются предсказания в рамках существующих теорий, измеряются различные параметры моделей и проводится поиск возможных отклонений от предсказаний, которые могут указывать на существование новых явлений. В рамках Стандартной модели удается с хорошей степенью точности рассчитать основные жесткие процессы, смоделировать получаемые данные и провести соответствующие измерения. Например, достигнутый на 2015-й год уровень точности измерения массы топ-кварка составляет 0,38% ( $m_{\text{top}} = 172,38 \pm 0,10$  (стат.)  $\pm 0,65$  (сист.) ГэВ, где «стат.» – статистическая погрешность, а «сист.» – систематическая). Достижение такой высокой точности измерений стало возможным благодаря развитию различных эффективных методов на всех этапах исследований, начиная от теоретических методов, компьютерной алгебры и численных вычислений, а также современных методов многомерного анализа и статистической обработки данных.

Сложность уравнений, описывающих физику элементарных частиц, не позволяет находить точные аналитические решения. Поэтому используются приближенные методы вычислений, основанные на разложении по степеням малого безразмерного параметра, присущего этой теории, и последующих вычислений методами теории возмущений. В некоторых теоретических подходах не существует малого безразмерного параметра, и такие расчеты требуют масштабных численных вычислений на решетке с использованием суперкомпьютеров.

Большое количество вычислений, необходимых для учета всех возможных процессов, проходящих в современных экспериментах, потребовало развития методов символьных алгебраических вычислений, выполняемых автоматически на компьютерах. Точное компьютерное моделирование всех событий, происходящих в современных экспериментах, стало необходимой составляющей проводимых исследований.

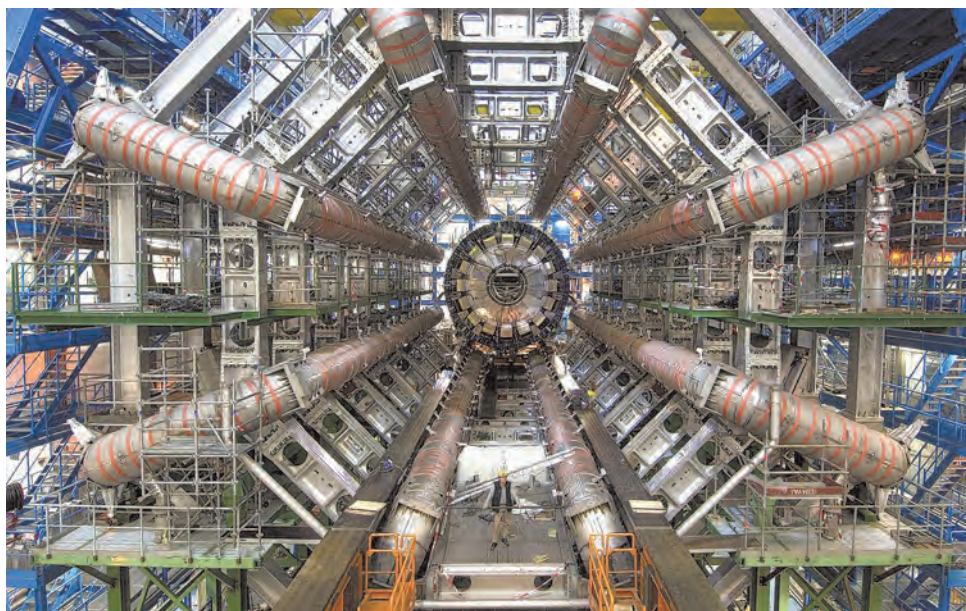
Большая часть исследований нацелена на обнаружение редких событий и выделение возможного эффекта на фоне большого количества событий, не представляющих интереса (фоновых событий). Такие исследова-



ния потребовали развития и применения многомерных методов статистического анализа, таких как искусственные нейронные сети или деревья решений. Многомерные методы анализа позволяют максимально полно учесть все корреляции наблюдаемых событий, оптимальным образом провести классификацию и выделить интересные события из фона. Все процессы, проходящие в современных экспериментах, имеют вероятностную природу, и любой экспериментальный результат является результатом статистического анализа, учитывающего все неопределенности проведенных исследований. Это позволяет публиковать результаты, вызывающие доверие у научного сообщества, и количественно характеризовать степень статистической достоверности результата.

Стандартная модель, с одной стороны, весьма успешно (в ряде случаев на уровне точности 0,1%) описывает существующие экспериментальные данные. Однако, с другой стороны, имеет ряд внутренних проблем, как например объяснение иерархии масштабов; не дает ответа на многие вопросы, такие как количество и структура поколений кварков и лептонов; имеет много свободных параметров и т.д. Недавно обнаруженные нейтринные осцилляции никак не предсказывались СМ, значение плотности энергии вакуума, вычисляемое в рамках СМ, примерно на 120 порядков превышает значение космологической постоянной. Краеугольный камень в построении СМ – механизм спонтанного нарушения симметрии Энглера–Браута–Хиггса – был отмечен Нобелевской премией после экспериментального обнаружения нового скалярного бозона, близкого по свойствам к бозону Хиггса, предсказанному СМ. Однако простой механизм спонтанного нарушения неустойчив по отношению к квантовым поправкам в массовый параметр бозона Хиггса, что является серьезной нерешенной проблемой, называемой проблемой «малых иерархий». Теория гравитации стоит особняком от СМ, а проблема включения гравитации становится все более острой, особенно в свете последних астрофизических наблюдений о наличии темной энергии и ускоренном расширении Вселенной.

Практически все специалисты, работающие в области физики высоких энергий, сходятся во мнении, что СМ никак не может быть настоящей фундаментальной теорией, а скорее является низкоэнергетическим пределом какой-то новой теории, позволяющей решить по крайней мере часть проблем СМ. Попытки обобщения СМ предпринимаются уже в течение почти сорока лет, в частности – путем построения моделей Великого объединения и суперсимметричных расширений СМ, моделей с дополнитель-



*Большой адронный коллайдер (взгляд изнутри)*

ными измерениями пространства и моделей с наличием новых сверхсильных взаимодействий. Однако реалистическая теория взаимодействий элементарных частиц за рамками СМ до сих пор не создана. Задача построения такой теории, которая бы не противоречила экспериментальным данным, с одной стороны, и решала какие-то из проблем СМ, с другой стороны, является очень актуальной. На решение задачи о том, как устроен микромир на новых, неизведанных ранее сверхмалых расстояниях порядка  $10^{-18}$  см и меньше, направлена и физическая программа исследований на Большом адронном коллайдере, и физическая программа планируемого в будущем линейного электрон-позитронного коллайдера.

В заключение необходимо отметить, что физика высоких энергий не только является одной из наиболее фундаментальных областей науки, но прикладное значение ее результатов и сопутствующих открытий уже стало одним из стимулов для проведения дальнейших исследований в этой области. Один из самых ярких примеров – это создание в 1989 году в ЦЕРНе внутренней системы обмена научной информацией, которая развилась во всемирную информационную паутину и в современном мире называется интернетом. Развитие детекторов излучения и промышленных ускорителей позволило разработать и внедрить совершенно новые технологии в различных прикладных областях – от разработки новых материалов до таможенного осмотра грузов. Отдельно надо отметить применение ускорителей в медицине. Использование гамма-терапии для лечения онкологических заболеваний уже сохранило множество жизней, а развитие протонной и ионной терапии позволит поднять методы и эффективность лечения на новый уровень. Если провести аналогию с перспективными технологиями, обладающими масштабом нанометров, то современная физика элементарных частиц является основой технологий масштаба фемтометров и меньше.

# Метод множителей Лагранжа

М. ГОРЕЛОВ

**И**ДЕЯ, ВПЕРВЫЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИ ИСПОЛЬЗОВАННАЯ Лагранжем в «Аналитической механике» (1788 г.), в настоящее время является одной из центральных в большой теории, охватывающей математическое программирование, теорию оптимальных процессов, математическую экономику, некоторые разделы геометрии, анализа и физики. Эта теория довольно сложна, но сама оригинальная идея Лагранжа вполне элементарна и помогает при решении многих олимпиадных задач. Об этом и пойдет речь.

## Основная идея

Начнем с примера.

**Задача 1** (M1067). Докажите, что для неотрицательных чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**Решение.** Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-a^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{(3a + 2\sqrt{3})(3a - \sqrt{3})^2}{1-a^2} \geq 0 \end{aligned}$$

при  $0 \leq a < 1$ . Сложим это неравенство с двумя аналогичными:

$$\frac{b}{1-b^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( b^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

и

$$\frac{c}{1-c^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( c^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0.$$

Получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} - \\ - \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2 - 1) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

которое справедливо при всех  $a, b, c$  из интервала  $[0; 1)$ . Если числа  $a, b, c$  вдобавок удовлетворяют условию  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , то получаем как раз доказываемое неравенство.

Задача решена. Читатель может убедиться, что приведенное решение не сложнее авторского. Кроме того, оно совершенно элементарно. Слово «очевидно», использованное выше, как и всегда в математической литературе, означает «проверьте сами». Проверку соответствующего

тождества осуществить в самом деле нетрудно: нужно умножить его на общий знаменатель и раскрыть скобки. Действительно непонятным остается только, откуда взялось странное выражение

$$\frac{a}{1-a^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} ?$$

Частенько такого рода трюки школьникам не считаются нужным объяснять. Мы же как раз изложим метод, позволяющий находить подобные решения.

И начнем с только что разобранный задачи. Она будет решена, если мы найдем минимум функции

$$f(a, b, c) = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

при условии, что  $a, b, c$  неотрицательны и удовлетворяют равенству  $g(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$ . Чтобы не путаться, минимум функции  $f$ , заданной на множестве всех неотрицательных  $a, b, c$ , будем называть просто минимумом, а минимум  $f$  при дополнительном условии  $g = 0$  — условным минимумом. Если бы условия  $g = 0$  не было, то минимум функции  $f$  можно было бы искать, используя привычные методы. А вот равенство  $g = 0$  мешает. Избавиться от него позволяет такой прием.

Возьмем какое-нибудь число  $\lambda$  и рассмотрим функцию  $L(a, b, c; \lambda) = f(a, b, c) + \lambda g(a, b, c)$ . Каким именно взять  $\lambda$ , нам еще предстоит определить. Заметим, что для любых чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $g(a, b, c) = 0$ , значение функции  $L(a, b, c; \lambda)$  совпадает со значением функции  $f(a, b, c)$ . Попробуем вместо условного минимума функции  $f$  найти минимум функции  $L(a, b, c; \lambda)$ . Если параметр  $\lambda$  удастся подобрать так, что в точке  $(a_0, b_0, c_0)$  минимума функции  $L(a, b, c; \lambda)$  будет выполняться равенство



Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик, механик и астроном итальянского происхождения. Один из крупнейших математиков XVIII века. Он внес значительный вклад в развитие математического анализа, теории чисел, теории вероятностей. Но, пожалуй, главными были его работы по аналитической механике и вариационному исчислению, в которых обсуждаемая нами идея играет одну из центральных ролей.



$g(a_0, b_0, c_0) = 0$ , то мы автоматически найдем условный минимум  $f$ .

Фактически, в приведенном решении задачи 1 использовалось  $\lambda = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$  без объяснения, как оно найдено. Объясним, как можно было найти это значение  $\lambda$ .

Для наших функций  $f$  и  $g$  функцию  $L$  можно записать в виде суммы трех слагаемых:

$$L(a, b, c; \lambda) = \left( \frac{a}{1-a^2} + \lambda \left( a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{b}{1-b^2} + \lambda \left( b^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{c}{1-c^2} + \lambda \left( c^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Каждое слагаемое – это функция только от одной из переменных  $a, b, c$ , поэтому в точке минимума функции  $L(a, b, c; \lambda)$  оно тоже должно быть минимальным. Значит, производная функции

$$l(a; \lambda) = \frac{a}{1-a^2} + \lambda \left( a^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

в соответствующей точке  $a$  должна равняться нулю, т.е. должно выполняться условие

$$l'(a; \lambda) = \frac{1+a^2}{(1-a^2)^2} + 2\lambda a = 0.$$

Аналогично, должны выполняться равенства  $\frac{1+b^2}{(1-b^2)^2} + 2\lambda b = 0$  и  $\frac{1+c^2}{(1-c^2)^2} + 2\lambda c = 0$ . Этих трех уравнений вместе с уравнением  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  в принципе достаточно для того, чтобы найти четыре неизвестных  $a, b, c$  и  $\lambda$ . Правда, система уравнений получается довольно сложной. Дело спасает то, что нам достаточно найти одно значение  $\lambda$ . Поэтому нужно одно «хорошее» решение системы. А хорошее решение – это такое решение, которое соответствует точке минимума функции  $L(a, b, c; \lambda)$ . А в точке минимума производная меняет знак с минуса на плюс.

График функции  $y = \frac{1+a^2}{(1-a^2)^2}$  приведен на рисунке

1 (эта картинка – «точная», но для наглядности масштабы по осям абсцисс и ординат выбраны разными). Видно, что он может пересекаться с прямой  $y = -2\lambda a$  самое большее в двух точках, причем если точек пересечения две, то «хорошему» решению соответствует правая. Поэтому в «хорошем» решении  $a = b = c$ . С учетом равенства  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  получим  $a =$

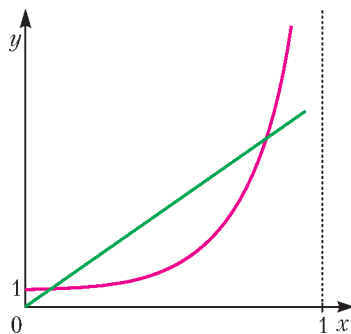


Рис. 1

$= b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Подставляя найденное значение  $a$  в уравнение  $\frac{1+a^2}{(1-a^2)^2} + 2\lambda a = 0$ , найдем  $\lambda = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Теперь остается честно найти минимум функции  $L\left(a, b, c; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ . Выше это было сделано с использованием алгебраической природы задачи. Впрочем, то же можно было бы сделать стандартным способом, с помощью производной.

**Упражнение 1.** Сделайте это.

Приведенная схема рассуждений носит название *метода множителей Лагранжа*. Функция  $L(a, b, c; \lambda)$  называется *функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи условной минимизации, а параметр  $\lambda$  – *множителем Лагранжа*.

Заметим, что формулировка задачи 1 содержит подсказку к ее решению. Действительно, задача симметрична, поэтому вполне логично предположить, что условный минимум функции  $f(a, b, c)$  достигается при

$a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Непосредственной подстановкой в доказываемое неравенство можно убедиться, что это действительно так. А тогда «хорошее» решение системы уравнений находится без ссылки на рисунок. Такие подсказки можно и нужно использовать.

Обратим внимание на то, что при решении данной задачи мы пользовались *достаточными* условиями минимума (если удастся найти нужное  $\lambda$ , то задача будет решена). Можно показать, что существует широкий класс задач, для которых достаточные условия приведенного типа срабатывают. Но это выходит за рамки данной статьи. Мы ограничимся тем, что на примерах покажем, как эти условия работают.

Все приводимые ниже решения состоят из трех частей:

- (1) постановка задачи оптимизации;
- (2) анализ;
- (3) доказательство.

Вторую часть «в чистовик» можно не писать, что и было сделано выше. Поэтому на этом этапе допустимы некоторые вольности: поиск только некоторых решений, угадывание этих решений, правдоподобные рассуждения и т.п. В первой части соображения здравого смысла тоже играют заметную роль. А вот в третьей части все должно быть абсолютно строго. Во избежание недоразумений, в начале каждой части стоит соответствующая цифра в скобках.

### Неравенство Йенсена

Это неравенство было получено О.Гельдером в 1889 году, но носит название неравенства Йенсена. Неравенство справедливо для любой выпуклой вверх функции. В следующей задаче мы докажем его для несколько более узкого класса функций.

**Задача 2.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на некотором (конечном или бесконечном) открытом

интервале и ее производная не возрастает. Докажите, что тогда для любых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  из этого интервала имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right).$$

**Решение.** (1) В этой задаче нет сложных ограничений. Но иногда их стоит искусственно ввести, а потом избавиться с помощью метода множителей Лагранжа. Игра стоит свеч, если полученная задача окажется проще, например разобьется на исследование функций одной переменной. Зафиксируем произвольное число  $s$  из рассматриваемого интервала и рассмотрим задачу максимизации величины  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)$  при ограничении  $x_1 + x_2 + \dots + x_k - ks = 0$ . Если окажется, что искомый максимум достигается при  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = s$ , то нужное неравенство будет доказано для всех  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , удовлетворяющих условию  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = ks$ . А в силу произвольности  $s$  отсюда будет следовать справедливость этого неравенства для всех  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

(2) Функция Лагранжа данной задачи оптимизации имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_k; \lambda) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_k - ks) = (f(x_1) + \lambda(x_1 - s)) + (f(x_2) + \lambda(x_2 - s)) + \dots + (f(x_k) + \lambda(x_k - s)).$$

Нас интересует такое значение множителя Лагранжа  $\lambda$ , для которого максимум функции  $L(x_1, x_2, \dots, x_k; \lambda)$  достигается при  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = s$ , или, что то же самое, максимум функции  $l(x; \lambda) = f(x) + \lambda(x - s)$  достигается при  $x = s$ . Для этого необходимо, чтобы производная этой функции при  $x = s$  равнялась нулю, т.е.  $f'(s) + \lambda = 0$ . Откуда  $\lambda = -f'(s)$ .

(3) Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - f'(s)(x - s)$ .

В силу монотонности производной функции  $f(x)$ , производная  $g'(x) = f'(x) - f'(s)$  функции  $g(x)$  неотрицательна при  $x \leq s$  и неположительна при  $x \geq s$ . А этого достаточно для того, чтобы в точке  $x = s$  функция  $g(x)$  имела максимум. Поэтому максимальное значение функции  $g(x)$  равно  $g(s)$ , т.е. при всех  $x$  выполняется неравенство  $g(x) \leq g(s)$ . В частности,  $g(x_i) \leq g(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Суммируя эти неравенства, получим, что неравенство

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) - f'(s)(x_1 + x_2 + \dots + x_k - ks) \leq kf(s)$$

справедливо для всех значений переменных из рассматриваемого интервала. Значит, при условии  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = ks$  справедливо неравенство

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq kf(s).$$



Йоганн Людвиг Виллиам Вольдемар Йенсен (1859–1925) — датский математик и инженер. Он в значительной степени был самоучкой, никогда не занимал академических должностей, а занимался математикой в свободное от основной работы время. Йенсен первым начал систематическое изучение выпуклых функций. Свое знаменитое неравенство он опубликовал в 1906 году.

А в силу произвольности  $s$  отсюда следует, что неравенство Йенсена справедливо при всех интересующих нас значениях переменных.

Неравенство Йенсена имеет много важных частных случаев. Впрочем, методом множителей Лагранжа они решаются не намного длиннее сведения их к неравенству Йенсена.

#### Упражнения

2. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на некотором (конечном или бесконечном) открытом интервале и ее производная не убывает. Докажите, что тогда для любых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right).$$

3. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на некотором (конечном или бесконечном) открытом интервале и ее производная не возрастает. Докажите, что тогда для любых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и любых положительных чисел  $p_1, p_2, \dots, p_k$  имеет место неравенство

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_k f(x_k) \leq (p_1 + p_2 + \dots + p_k) f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}\right).$$



Огюстен Луи Коши (1789–1857) — французский математик. Он известен оригинальными результатами в самых разных областях математики, от теории чисел до геометрии и механики. Но большое внимание он уделял и систематизации накопленных к тому времени знаний. В частности, в 1821 году вышел в свет его «Курс анализа Королевской политехнической школы», в котором было опубликовано доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Это доказательство до сих пор остается наиболее популярным.





Фань Цзы (1914–2010) – математик, родившийся в Китае и работавший во Франции, США и на Тайване (иногда его имя переводят с английского как Ки Фан). Получил важные результаты во многих областях как чистой, так и прикладной математики.

4 (Санкт-Петербургская олимпиада, 1980 г.). Сумма четырех положительных чисел  $a, b, c, d$  равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

5 (Коши, 1821 г.). Докажите, что для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}.$$

6 (Фань Цзы). Докажите, что для любых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  из отрезка  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}}{\sqrt[k]{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k)}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{(1-a_1) + (1-a_2) + \dots + (1-a_k)}.$$

7. Докажите, что для неотрицательных чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

8. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы остроугольного треугольника. Докажите, что тогда

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

9 (олимпиада школы 239 Санкт-Петербурга, 2001 г.). Для любых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{a_1(1+a_1)}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2(1+a_2)}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k(1+a_k)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{p(1+p)}\right)^k, \text{ где } \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = p.$$

10 (жюри Международной олимпиады, 1998 г.). Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – действительные числа, большие 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{k}{1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}}.$$

11 (Санкт-Петербургская олимпиада, 2012 г.). Даны положительные числа  $a, b, c, d$ . Известно, что  $\frac{2}{a^3+1} + \frac{2}{b^3+1} + \frac{2}{c^3+1} + \frac{2}{d^3+1} = 2$ . Докажите

неравенство

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \geq 0.$$

12. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – действительные числа, удовлетворяющие условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$ . Докажите неравенство

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2 \geq \frac{(k^2+1)^2}{k}.$$

### Неравенство Гёльдера

В первой половине прошлого века математический анализ в значительной степени перешел на язык геометрии. В связи с этим были доказаны и стали играть очень важную роль неравенство Гёльдера и неравенство Минковского.

Результат Гёльдера (1889 г.) может быть сформулирован следующим образом.

**Задача 3.** Пусть числа  $p$  и  $q$  положительны и удовлетворяют условию  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Докажите, что тогда для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \leq \left(a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Решение.** (1) Доказываемое неравенство не изменится, если все числа  $b_1, b_2, \dots, b_k$  умножить на одно и то же положительное число. Поэтому можно считать<sup>2</sup>, что  $b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q = 1$ . Будем считать числа  $b_1, b_2, \dots, b_k$  параметрами (произвольными, но фиксированными). По тем же причинам можно считать<sup>3</sup>, что  $a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p = 1$ . Задача будет решена, если мы докажем, что при сформулированных условиях  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \leq 1$ . А для этого достаточно найти

<sup>2</sup> Случай, когда все переменные  $b_i$  равны нулю, придется оговорить особо, но он очевиден. Это ограничение можно в принципе не вводить, но оно сильно упрощает формулы.

<sup>3</sup> Вот это ограничение принципиально: иначе максимума не будет существовать! Обратите внимание на то, что в данном случае ограничение вводится несколько иначе, чем при доказательстве неравенства Йенсена.



Отто Людвиг Гёльдер (1859–1937) – немецкий математик, специалист в области алгебры и анализа. Но, пожалуй, наибольшую известность ему принесло данное неравенство.

максимум функции  $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$  при ограничении  $a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p - 1 = 0$ .

(2) Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} L(a_1, a_2, \dots, a_k; \lambda) &= \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \lambda (a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p - 1) = \\ &= (a_1 b_1 + \lambda a_1^p) + (a_2 b_2 + \lambda a_2^p) + \dots + (a_k b_k + \lambda a_k^p) - \lambda. \end{aligned}$$

Максимум этой функции достигается, когда максимальны значения функций  $l_i(a_i, \lambda) = a_i b_i + \lambda a_i^p$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Производная функции  $l_i(a_i; \lambda)$  равна  $b_i + \lambda p a_i^{p-1}$  и обращается в ноль в единственной точке  $a_i = \left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p-1}} b_i^{\frac{1}{p-1}}$ . Подставляя эти значения в ограничение оптимизационной задачи, получим

$$\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(b_1^{\frac{p}{p-1}} + b_2^{\frac{p}{p-1}} + \dots + b_k^{\frac{p}{p-1}}\right) = 1.$$

В силу равенства  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  имеем  $\frac{p}{p-1} = q$ , поэтому найденное уравнение примет вид

$$\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^q (b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q) = 1,$$

или, с учетом сделанного предположения,  $\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^q = 1$ .

Отсюда имеем  $\lambda = -\frac{1}{p}$  и  $a_i = b_i^{\frac{1}{p-1}} = b_i^{\frac{q}{p}}$ .

(3) Рассмотрим функцию  $g_i(a_i) = a_i b_i - \frac{1}{p} a_i^p$ . Ее производная  $b_i - \frac{1}{p} a_i^{p-1}$  обращается в ноль в единственной точке  $a_i = b_i^{\frac{1}{p-1}}$ . Из условия  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

следует, что  $p > 1$ , поэтому производная убывает и в этой точке меняет знак с положительного на отрицательный. Этого достаточно, чтобы утверждать, что в указанной точке функция имеет максимум. Следовательно, в точке максимума выполняется условие  $a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p - 1 = 0$ , а искомое максимальное значение выражения  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$  равно

$$\begin{aligned} b_1^{\frac{1}{p-1}} b_1 + b_2^{\frac{1}{p-1}} b_2 + \dots + b_k^{\frac{1}{p-1}} b_k &= \\ &= b_1^{\frac{p}{p-1}} + b_2^{\frac{p}{p-1}} + \dots + b_k^{\frac{p}{p-1}} = \\ &= b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

#### Упражнения

**13.** Получите тот же результат, минимизируя значение  $a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p$  при ограничении  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k = 1$ .

**14.** Пусть одно из чисел  $p$  или  $q$  отрицатель-

но, и выполняется условие  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Докажите, что тогда для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k &\geq \\ &\geq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_k^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

**15** (неравенство Коши–Буняковского, 1821 г.). Докажите, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}.$$

**16** (неравенство Минковского, 1896 г.). Пусть  $p > 1$ . Докажите, что для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} ((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ &\leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p + \dots + b_k^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

**17** (Минковский, 1896 г.). Докажите, что для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_k + b_k))^{\frac{1}{k}} \geq (a_1 a_2 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} + (b_1 b_2 \dots b_k)^{\frac{1}{k}}.$$

**18** (Санкт-Петербургская олимпиада, 1993 г.). Докажите, что для любых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  справедливо неравенство

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A + B},$$

где  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_k, B = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ .

**19.** Положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  удовлетворяют условию

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)^3 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2.$$



Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) – российский математик украинского происхождения, бывший, в частности, вице-президентом Российской академии наук. Больше всего он занимался теорией чисел и теорией вероятностей, в том числе и практическиими применениями последней. Много внимания он уделял развитию математического образования в России, и как педагог, и на различных административных должностях.

Цитированное выше неравенство было доказано Коши еще в 1821 году. Буняковский доказал в 1859 году его интегральный аналог

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

Через 25 лет тот же результат получил немецкий математик Карл Герман Амандус Шварц (1843–1921). Поэтому в западной литературе оба неравенства называют неравенствами Коши–Шварца. В нашей стране и два приведенных неравенства, и их различные аналоги и обобщения называют неравенствами Коши–Буняковского.





Герман Минковский (1864–1909) – немецкий математик, сумевший объединить геометрию с теорией чисел и физикой. Один из учителей Альберта Эйнштейна.

мизации выглядит так:

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2\operatorname{tg} \alpha + 2\operatorname{tg} \beta + 2\operatorname{tg} \gamma + 2\operatorname{tg} \delta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta + \lambda(\alpha + \beta + \gamma + \delta - \pi) = (2\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha + \lambda\alpha) + (2\operatorname{tg} \beta + \sin 2\beta + \lambda\beta) + (2\operatorname{tg} \gamma + \sin 2\gamma + \lambda\gamma) + (2\operatorname{tg} \delta + \sin 2\delta + \lambda\delta) - \lambda\pi.$$

Пусть  $l(\alpha; \lambda) = 2\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha + \lambda\alpha$ , тогда

$$l'(\alpha; \lambda) = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \cos 2\alpha + \lambda = 2\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2\cos^2 \alpha\right) + \lambda - 2.$$

Уравнение  $\frac{1}{t} + 2t = 2 - \lambda$  в зависимости от  $\lambda$  может иметь на интервале  $(0; 1)$  либо одно, либо два решения. Соответственно, и уравнение  $l'(\alpha; \lambda) = 0$  будет иметь на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  одно или два решения. В первом случае это решение дает точку минимума функции  $l(\alpha; \lambda)$ . Во втором случае большее из решений соответствует точке локального минимума, а меньшее – точке максимума функции  $l(\alpha; \lambda)$ . В этом случае глобальный минимум может достигаться либо в первой критической точке, либо в левом конце отрезка  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Но в любом случае для того, чтобы функция  $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  имела минимум, необходимо, чтобы  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ . С учетом данного условия получим  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{4}$ . А значит,  $\lambda = -4$ .

(3) Рассмотрим функцию  $g(x) = 2\operatorname{tg} x + \sin 2x - 4x + \pi$ . Производная  $g'(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos^2 x\right) - 6$  имеет на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  единственный корень  $x = \frac{\pi}{4}$ , в котором меняет знак с минуса на плюс. Этого достаточно для того, чтобы в точке  $x = \frac{\pi}{4}$  эта функция имела минимум. Поэтому  $g(x) = 2\operatorname{tg} x + \sin 2x - 4x + \pi \leq 3 = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . Подставляя в это неравенство вместо  $x$  значения  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и суммируя, получим  $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq 12$ , т.е.  $S_1 + S_2 \leq 6$ .

Полученный результат – вариант следующей задачи, предложенной И.Ф. Шарыгиным.

**Задача 5.** Вокруг окружности радиуса 1 описан многоугольник площади  $S_1$ . Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив многоугольник площади  $S_2$ . Каково наименьшее возможное значение суммы  $S_1 + S_2$ ?

Теперь я не удержусь от того, чтобы процитировать статью В.Протасова и В.Тихомирова «Геометрические шедевры Шарыгина» (Квант №1 за 2006 г.), из

Докажите неравенство

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + \dots + \frac{a_k^3}{b_k} \geq 1.$$

20 (M1193). Докажите для любых чисел  $a, b, c, x, y, z$  неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

### Геометрические задачи

Много примеров использования метода множителей Лагранжа доставляют геометрические задачи на максимум или минимум. Вот несколько из них.

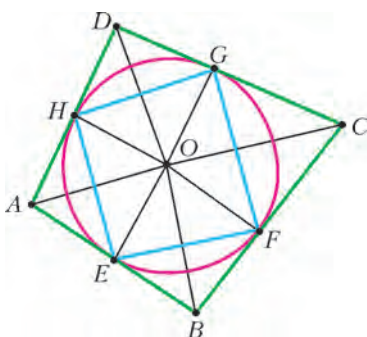


Рис. 2

**Задача 4.** Вокруг окружности радиуса 1 описан четырехугольник площади  $S_1$ . Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив четырехугольник площади  $S_2$ . Каково наименьшее возможное значение суммы  $S_1 + S_2$ ?

**Решение.** (1) Пусть  $ABCD$  – больший четырехугольник,  $EFGH$  – меньший (рис. 2), а  $O$  – центр окружности. Обозначим  $\angle AOE = \angle AOH = \alpha$ ,  $\angle BOF = \angle BOE = \beta$ ,  $\angle COG = \angle COF = \gamma$ ,  $\angle DOH = \angle DOG = \delta$ . Тогда  $S_1 = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta$ , а  $S_2 = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta)$ . Таким образом, задача сводится к поиску минимума функции

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2\operatorname{tg} \alpha + 2\operatorname{tg} \beta + 2\operatorname{tg} \gamma + 2\operatorname{tg} \delta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\delta.$$

Углы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  связаны соотношением  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ , а поскольку по отношению к четырехугольнику  $ABCD$  окружность является вписанной, а не невписанной, все углы принадлежат интервалу  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

(2) Функция Лагранжа поставленной задачи опти-



Игорь Федорович Шарыгин (1937–2004) – российский математик, педагог и популяризатор науки.

которой была взята эта задача: «Ни авторского, ни какого-либо другого решения этой задачи мы, увы, не знаем». Теперь есть инструмент, чтобы решить эту задачу! Оставляем это читателю «на сладкое».

**Задача 6.** Пусть  $a, b, c, S$  – соответственно стороны и площадь некоторого остроугольного треугольника,  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы другого остроугольного треугольника. Докажите, что

$$a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma \geq 4S,$$

причем равенство имеет место лишь в случае, когда оба треугольника подобны.

**Решение.** (1) Будем считать стороны  $a, b, c$  заданными, а углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  переменными и найдем минимум функции  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma$ . По условию выполняется равенство  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

(2) Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) &= \\ &= a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = \\ &= (a^2 \operatorname{ctg} \alpha + \lambda \alpha) + (b^2 \operatorname{ctg} \beta + \lambda \beta) + (c^2 \operatorname{ctg} \gamma + \lambda \gamma) - \lambda \pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $l_1(\alpha; \lambda) = a^2 \operatorname{ctg} \alpha + \lambda \alpha$ . В ее точке минимума должна обращаться в ноль производная

$$l_1'(\alpha; \lambda) = -\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \lambda. \text{ Аналогично получаются равенства } -\frac{b^2}{\sin^2 \beta} + \lambda = 0 \text{ и } -\frac{c^2}{\sin^2 \gamma} + \lambda = 0. \text{ Вместе с условием задачи эти три уравнения дают довольно сложную систему для нахождения четырех неизвестных } \alpha, \beta, \gamma \text{ и } \lambda.$$

Но у нас есть подсказка: хотелось бы, чтобы углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  были равны углам треугольника со сторонами  $a, b, c$ . А тогда  $\lambda = 4R^2$ , где  $R$  – радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами  $a, b$  и  $c$ .

(3) Рассмотрим функцию  $g_1(\alpha) = a^2 \operatorname{ctg} \alpha + 4R^2 \alpha$ . Ее производная  $g_1'(\alpha) = -\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + 4R^2$  обращается в ноль

в точках  $\alpha_0 + 2\pi k$  и  $\pi - \alpha_0 + 2\pi k$ , где  $\alpha_0 = \arcsin \frac{a}{2R}$  – угол в треугольнике со сторонами  $a, b, c$ , противолежащий стороне  $a$ , а  $k$  – целое число. В интервал  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

попадает только одна из них  $\alpha = \alpha_0$ , и в ней производная меняет знак с минуса на плюс. Этого достаточно,

чтобы утверждать, что в этой точке достигается минимум. Аналогично устанавливается, что минимумы функций  $g_2(\beta) = b^2 \operatorname{ctg} \beta + 4R^2 \beta$  и  $g_3(\gamma) = c^2 \operatorname{ctg} \gamma + 4R^2 \gamma$  достигаются при  $\beta = \beta_0$  и  $\gamma = \gamma_0$ , где  $\beta_0$  и  $\gamma_0$  – два других угла треугольника со сторонами  $a, b$  и  $c$ .

Таким образом, абсолютный минимум функции  $L(\alpha, \beta, \gamma, R^2)$  достигается в единственной точке  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ , удовлетворяющей ограничению задачи. Значит, он совпадает с условным минимумом и равен

$$\begin{aligned} &a^2 \operatorname{ctg} \alpha_0 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_0 + \\ &+ c^2 \operatorname{ctg} \gamma_0 + \lambda(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 - \pi) = \\ &= a^2 \operatorname{ctg} \alpha_0 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_0 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_0. \end{aligned}$$

Но при выполнении ограничения задачи значения функций  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma$  и  $L(\alpha, \beta, \gamma, R^2)$  совпадают, значит, совпадают и их условные минимумы.

Остается заметить, что  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_0$  – учетверенная площадь одного из треугольников, на которые разбивают треугольник со сторонами  $a, b, c$  отрезки, соединяющие его вершины с центром описанной окружности.

Данный результат справедлив и без предположений об остроугольности рассматриваемых треугольников. Более того, он может быть получен методом множителей Лагранжа. Вот только достаточные условия в общем случае не срабатывают (смекните, почему?), а нужны необходимые условия и доказательство существования минимума. Но это уже тема для отдельного разговора.

#### Упражнения

**21 (M716).** Из точки  $P$  внутри данного треугольника  $ABC$  опускаются перпендикуляры  $PA_1, PB_1, PC_1$  на прямые  $BC, AC$  и  $AB$ . Для каких точек  $P$  внутри треугольника  $ABC$  величина  $\frac{BC}{PA_1} + \frac{CA}{PB_1} + \frac{AB}{PC_1}$  принимает наименьшее значение?

**22.** Докажите, что среди всех многоугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный.

**23.** Докажите, что среди всех многоугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

**24.** Пусть  $a, b, c$  – стороны остроугольного треугольника,  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы другого треугольника. Докажите, что

$$bc \cos \alpha + ca \cos \beta + ab \cos \gamma \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

**25.** Докажите, что среди всех четырехугольников с данными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный.

**26 (M1439).** Длины сторон треугольника равны  $a, b, c$ , а длины проведенных к ним медиан равны  $m_a, m_b$  и  $m_c$  соответственно. Докажите неравенства:

$$\text{а) } \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

**Указание.** Примите слагаемые в левой части доказываемого неравенства за переменные и найдите связь между ними.



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5-6-2015» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2396» или «Ф2403». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача M2396 предлагалась на XI Олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, задачи M2397–M2399, M2400,а, M2402–M2404 предлагались на заключительном этапе XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи M2396–M2405, Ф2403–Ф2412

**M2396.** В неравностороннем прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина гипотенузы  $AC$ , а точки  $H_a$  и  $H_c$  – ортоцентры треугольников  $ABM$  и  $CBM$  соответственно. Докажите, что прямые  $AH_c$  и  $CH_a$  пересекаются на прямой, проходящей через середины катетов треугольника  $ABC$ .

Д.Швецов

**M2397.** Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального  $k$  сумма любых  $k$  идущих подряд членов этой последовательности делится на  $k + 1$ ?

С.Берлов

**M2398.** Поле представляет собой клетчатый квадрат  $41 \times 41$ , в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет – остается на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно наверняка уничтожить танк?

С.Берлов, А.Магазинов

**M2399.** Действительные числа  $a, b, c, d$ , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

К.Иванов

**M2400.** Назовем натуральное число почти квадратом, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Назовем натуральное

число представимым, если его можно представить в виде частного двух почти квадратов. Докажите, что:

- каждый почти квадрат представим;
- числа вида  $4(2k+1)^2$ , где  $k$  – натуральное, представимы;
- любое натуральное число, не являющееся точным квадратом, представимо;
- числа вида  $p^{2s}$ , где  $p$  – простое,  $s$  – натуральное, непредставимы.

В.Сендеров

**M2401.** Точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри треугольника  $ABC$ , таковы, что  $\angle PAB = \angle QAC$ ,  $\angle PBC = \angle QBA$ ,  $\angle PCA = \angle QCB$  (т.е. точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены). Прямые  $l$  и  $m$  проходят через точку  $A$  и симметричны относительно биссектрисы угла  $A$ . Пусть  $X$  – проекция точки  $P$  на прямую  $l$ , а  $Y$  – проекция точки  $Q$  на прямую  $m$ . Докажите, что если точки  $B, C, P, X$  лежат на одной окружности, то точки  $B, C, Q, Y$  тоже лежат на одной окружности.

П.Кожевников

**M2402.** На доске написаны  $N \geq 9$  различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдется девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких  $N$  это возможно?

Ф.Нилов

**M2403.** Дано натуральное число  $N \geq 3$ . Назовем набор из  $N$  точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен  $P(x)$  разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика  $P(x)$  нет красных точек, а ниже – нет синих, либо наоборот

(на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем  $k$  любой допустимый набор из  $N$  точек можно разделить многочленом степени не более  $k$ ?

*К.Тыщук*

**M2404.** У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых – разные, причем любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

*С.Берлов, И.Богданов*

**M2405.** Прямая, соединяющая центры описанной и вписанной окружностей треугольника, пересекает одну из его сторон в основании высоты, а другую – в точке ее касания с соответствующей внеписанной окружностью. Найдите угол между этими сторонами треугольника.

*А.Заславский*

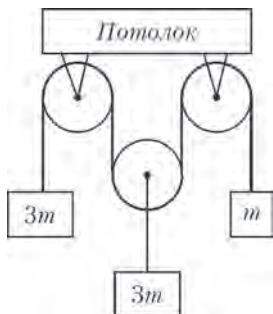
**Ф2403.** Внутри Земли имеется ядро радиусом  $r = 3,5$  тыс. км, которое гораздо плотнее земной коры. Поэтому ускорение свободного падения внутри Земли начиная от ее центра сначала линейно растет до границы ядра, а затем изменяется мало, оставаясь почти постоянным (и равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>) вплоть до поверхности Земли (радиус Земли  $R = 6370$  км). Если бы Алиса, жившая в Стране Чудес, упала в пустую дырку, проходящую через середину Земли, то через какое время она вернулась бы обратно к месту падения? С какой скоростью Алиса пролетала бы через центр Земли?

*А.Чудесова*

**Ф2404.** Ранним утром 4 апреля 2004 года (04-04-04) два полярника одновременно стартовали из своего лагеря ровно в 4 часа (по Московскому времени). Один шел со скоростью 4 км/ч так, что все время наступал на свою собственную тень (шел строго «от солнца»), другой двигался строго на восток со скоростью тоже 4 км/ч. Через 4 часа они встретились (столкнулись).

Какими были географические координаты полярного лагеря? На какое максимальное расстояние удалялись друг от друга полярники в течение этих четырех часов?

*К.Вантов*



*Рис. 1*

**Ф2405.** В механической системе, изображенной на рисунке 1, трение в осях блоков отсутствует, шкивы блоков невесомые, нити невесомые и нерас-

тяжимые. Не лежащие на шкивах участки нитей вертикальны. С какими ускорениями движутся грузы?

*А.Старов*

**Ф2406.** Волан для бадминтона имеет массу  $m = 5$  г и площадь поперечного сечения  $S = 30$  см<sup>2</sup>. При движении в воздухе со скоростью  $v$  волан испытывает силу сопротивления, направленную против скорости и равную  $F = kv^2\rho S$ , где  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воздуха. После удара ракеткой волан приобрел вертикальную скорость  $v_0 = 20$  м/с и взлетел над местом удара на высоту  $H = 10$  м. Чему равен коэффициент  $k$ ? Каким было ускорение волана сразу после удара? На какую высоту взлетел бы волан, если бы его начальная вертикальная скорость равнялась 10 м/с?

*Подсказка.* Для нахождения численных ответов воспользуйтесь калькулятором.

*Д.Сергеев*

**Ф2407.** Оцените по фотографии, приведенной на рисунке 2, размеры стеклянного кубика, лежащего на



*Рис. 2*

горизонтальной поверхности стекла. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$  Дж/м<sup>2</sup>.

*В.Стеклов*

**Ф2408.** Влажный воздух с относительной влажностью  $\phi = 100\%$  находился в сосуде с постоянным большим объемом под давлением  $p = 10^5$  Па и при температуре  $t_1 = 28$  °С. Этот воздух охладили до температуры  $t_2 = 10$  °С, и в сосуде возник туман. Какое количество теплоты пришлось отвести от каждого 1 м<sup>3</sup> объема воздуха? Какое давление установилось в сосуде? Давления насыщенных водяных паров при начальной и конечной температурах равны  $p_{н1} = 3,77$  кПа и  $p_{н2} = 1,23$  кПа соответственно. Молярная теплота испарения воды при 100 °С равна  $L_M = 40,6$  кДж/моль.

*В.Туманов*

**Ф2409.** Два провода ЛЭП (линий электропередач) постоянного тока находятся на одном уровне высоко над землей (представьте, что провода переброшены через Большой Каньон) на расстоянии  $L = 3$  м друг от друга и параллельно местному меридиану. Радиус поперечного сечения каждого провода  $r = 1$  см  $\ll L$ . Потенциалы проводов по отношению к земле имеют одинаковые величины и противоположные знаки. С помощью малогабаритного беспилотного вертолета, несшего на себе измерительную аппаратуру и леве-



го на той же высоте над землей, что и провода, была измерена напряженность статического электрического поля в точке, находящейся на расстоянии  $L$  восточнее одного из проводов и на расстояние  $2L$  восточнее другого, и она оказалась равной  $E = 3$  кВ/м. В этом же месте была измерена вертикальная составляющая вектора индукции магнитного поля:  $B_1 = 1,3 \cdot 10^{-4}$  Тл, направленная вверх. На расстоянии 100 м от ЛЭП вертикальная составляющая магнитного поля Земли направлена вниз и равна  $B_2 = 4,7 \cdot 10^{-5}$  Тл, а электрическое поле мало настолько, что чувствительности приборов не хватило, чтобы его измерить. Каково все-таки электрическое поле, созданное проводами ЛЭП, на расстоянии 100 м от них по горизонтали? Какая мощность передается по этой ЛЭП? На севере или на юге от участка, на котором проводились измерения, находится электростанция?

*А. Вольтов*

**Ф2410.** Вдоль экватора на опорах проложили провод из алюминия с поперечным сечением  $S = 1$  см<sup>2</sup>. Магнитное поле вблизи экватора однородное, горизонтальное, направленное к северу и равное по величине  $B = 3 \cdot 10^{-5}$  Тл. Какой ток нужно пропустить по проводу, чтобы он перестал давить на опоры (начал левитировать)? Оцените допустимую продолжительность этого эксперимента, если провод не успевает отводить тепло в окружающее пространство? Тепловые и электрические характеристики алюминия отыщите в справочниках самостоятельно.

*Э. Амтеров*

**Ф2411.** Над плоским квадратным листом бумаги расположен неподвижный точечный изотропный источник света. Известны освещенности поверхности листа вблизи трех углов квадрата:  $E_1 > E_2 > E_3$ . Эти величины меньше максимальной освещенности поверхности бумаги в одной из точек листа. Какова освещенность поверхности вблизи четвертого угла этого листа бумаги?

*С. Варламов*

**Ф2412.** Толщина стенок шарообразной стеклянной ампулы  $h = 1$  мм, внешний радиус ампулы  $R = 1$  см. В ампулу помещен радий в количестве  $m = 1$  мг, а воздух из ампулы откачан. Известно, что из  $M = 1$  г радия за 1 секунду вылетает в среднем  $N = 3,7 \cdot 10^{10}$   $\alpha$ -частиц (ядер гелия). Найдите установившееся давление образовавшегося в ампуле гелия при температуре  $T = 300$  К. Коэффициент диффузии гелия в стекле при такой температуре равен  $D = 5,7 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с. Через какое время после начала эксперимента давление внутри будет отличаться от установившегося значения не более чем на  $\eta = 1\%$ ?

*Й. Идар*

**Решения задач M2381–M2388,  
Ф2388–Ф2394**

**M2381.** В компании из 25 человек каждый знаком ровно с четырьмя другими. Оказалось, что тройку попарно знакомых людей можно выбрать  $k$  способами. Найдите наибольшее возможное значение  $k$ .

**Ответ:** 50.

Заметим, что количество троек попарно знакомых людей, в которые входит данный человек  $A$ , не превосходит 6. Действительно, каждая такая тройка содержит человека  $A$  вместе с парой его знакомых. Так как у человека  $A$  ровно четыре знакомых ( $B, C, D, E$  – см. рис.1), то пар знакомых – 6 ( $\{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$ ), тем самым нужная оценка доказана. Отсюда общее количество троек попарно знакомых людей не превосходит  $25 \times 6 / 3 = 50$  (деление на 3 возникает, поскольку каждая тройка посчитана трижды).

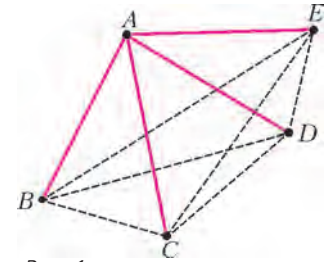


Рис. 1

Приведем пример, в котором получается ровно 50 троек попарно знакомых. Пусть компания поделена на 5 групп, и двое людей знакомы в том и только в том случае, когда они из одной группы (рис.2). Тогда, как

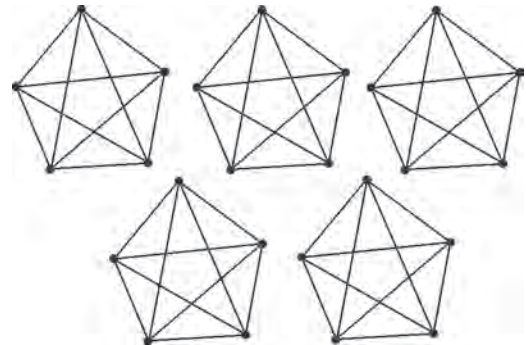


Рис. 2

нетрудно посчитать, в каждой группе будет  $C_5^3 = 10$  троек попарно знакомых людей. А всего таких троек будет 50.

*П. Кожевников*

**M2382.** Дано натуральное число  $n$ . Бесконечная последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  такова, что для любого натурального  $k$  число  $a_{k+n}$  равно количеству различных чисел среди чисел  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}$  (например, для  $n = 3$  возможна последовательность 1, 5, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, ...). Докажите, что начиная с некоторого члена данная последовательность периодична.

Заметим, что при  $k > n$  число  $a_k$  может принимать лишь конечное число значений: 1, 2, ...,  $n$ . При этом  $a_k$  полностью определяется набором предыдущих  $n$  членов последовательности. Этих условий уже достаточно, чтобы сделать вывод о том, что последовательность периодична, начиная с некоторого члена. Среди упорядоченных наборов  $(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n})$ ,  $(a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n+1})$ , ... найдутся два одинаковых (количество различных наборов не более  $n^n$ ). Пусть это наборы  $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+n-1})$  и  $(a_q, a_{q+1}, \dots, a_{q+n-1})$ , где  $p < q$ . Тогда  $a_p = a_q$ ,  $a_{p+1} = a_{q+1}, \dots, a_{p+n-1} = a_{q+n-1}$ , откуда последовательно получаем  $a_{p+n} = a_{q+n}$ ,

$a_{p+n+1} = a_{q+n+1}$  и т.д. Таким образом, начиная с  $a_p$ , последовательность периодична с периодом  $q - p$ .

Идея периодичности проиллюстрирована в замечательной статье А.Белова, М.Сапира «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике» в «Кванте» №4 за 1990 год.

Д. Чарыев

**M2383.** а) Известно, что  $2^x q = p^y + 1$ , где  $x, p, q, y$  – натуральные, большие 1, причем  $p$  и  $q$  – простые. Может ли  $x$  оказаться составным?

б) В равенстве  $2^x q = p^y - 1$  числа  $x, p, q$  – простые, а  $y$  – натуральное, большее 1. Чему может равняться  $p$ ?

а) **Ответ:** нет.

Предположим, что  $2^x q = p^y + 1$ , где  $x$  – составное. Тогда  $y$  нечетно (если  $y$  четно, то правая часть не делится на 4). Имеем:  $p^y + 1 = (p+1)K$ , где  $K = p^{y-1} - p^{y-2} + \dots - p + 1$  – нечетное, большее 1. Поскольку  $q$  – простое, получаем  $K = q$  и  $p+1 = 2^x$ , отсюда  $p = 2^x - 1$ . Но так как  $x$  составное, то  $2^x - 1$  тоже составное (скажем, оно делится на  $2^t - 1$ , где  $t$  – делитель числа  $x$ ,  $1 < t < x$ ). Противоречие.

б) **Ответ:**  $p = 3$  или  $p = 5$ .

При  $p = 3$  подходят  $x = 2, q = 2, y = 2$ . При  $p = 5$  подходят  $x = 3, q = 3, y = 2$ .

Теперь считаем, что  $p > 5$ .

Пусть  $y$  не степень двойки,  $y = zt$ , где  $t > 1$  и нечетно. Тогда  $p^y - 1 = (p^z - 1)K$ , где  $K = p^{z(t-1)} + p^{z(t-2)} + \dots + p^z + 1$  – нечетное, большее 1. Поскольку  $q$  – простое, получаем  $K = q$  и  $p^z - 1 = 2^x$ . Так как  $p > 5$ , то  $x > 2$ , значит,  $x$  нечетно. Но тогда  $2^x + 1$  делится на 3, откуда  $p = 3$  – противоречие.

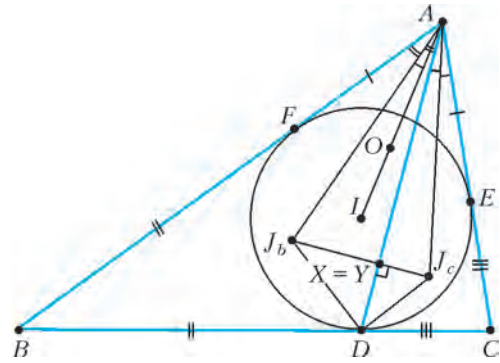
Пусть  $y$  четно. Тогда  $2^x q = p^y - 1$  делится на  $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ . Так как  $p$  не делится на 3, одно из чисел  $p-1, p+1$  делится на 3. Отсюда  $q = 3$ . Оба выражения  $p-1, p+1$  четны и ровно одно из них не делится на 4, это выражение равно либо 2, либо  $2 \cdot 3 = 6$ . Так как  $p > 5$ , приходим к единственному варианту:  $p = 7$ .

Оставшиеся возможности:  $p = 7, y$  – степень двойки. При  $y = 2$  имеем  $p^y - 1 = 48 = 2^4 \cdot 3$  – не подходит. Если же  $y$  делится на 4, то  $2^x q = 7^y - 1$  делится на  $7^4 - 1 = (7^2 - 1)(7^2 + 1)$ , поэтому делится на 3 и на 5, что нам также не подходит.

В. Сендеров

**M2384.** В треугольнике  $ABC$  вписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $D$ . Пусть  $J_b$  и  $J_c$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ACD$  соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $AJ_b J_c$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ .

Пусть вписанная окружность касается сторон  $CA$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно (см. рисунок). Пусть вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда имеем  $2DX = DA + DB - AB = DA + DB - BF - AF = DA - AF$  и, аналогично,  $2DY = DA - AE$ .



Отсюда следует, что  $DY = DX$ , значит, точки  $X$  и  $Y$  совпадают, тем самым,  $J_b J_c \perp AD$ .

Далее, обозначим через  $O$  центр описанной окружности треугольника  $AJ_b J_c$ . Тогда

$$\begin{aligned} \angle J_b A O &= \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A O J_b}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle A J_c J_b = \\ &= \angle X A J_c = \frac{1}{2} \angle D A C . \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \angle B A O &= \angle B A J_b + \angle J_b A O = \\ &= \frac{1}{2} \angle B A D + \frac{1}{2} \angle D A C = \frac{1}{2} \angle B A C , \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.

Ф. Ивлев

**M2385.** Петя взял  $k$  карточек ( $k > 1$ ) и покрасил каждую с одной стороны либо в красный, либо в зеленый цвет. Затем он выложил эти карточки по кругу окрашенными сторонами вниз. За ход Вася может указать на любое множество карточек и выяснить, правда ли, что на карточках этого множества встречаются оба цвета. После нескольких ходов он должен либо указать две соседние карточки разных цветов, либо доказать, что все карточки одноцветны. За какое наименьшее число ходов он гарантированно может это сделать?

**Ответ:**  $n$  такое, что  $2^{n-1} < k \leq 2^n$ .

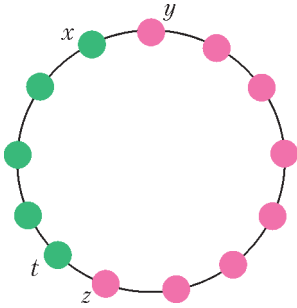
Достаточно доказать, что при  $k \leq 2^n$  требуемое можно выполнить за  $n$  ходов, а при  $k > 2^n$  – нельзя.

Докажем индукцией по  $n$ , что при  $k \leq 2^n$  требуемое возможно, даже если карточки лежат в ряд, а не по кругу. При  $n = 1$  утверждение очевидно. Пусть  $n > 1$ . Если  $k \leq 2^{n-1}$ , то требуемое возможно по предположению индукции. Иначе за первый ход спросим про первые  $2^{n-1} + 1$  карточки. Если все они одноцветны, применим предположение индукции к последним  $k - 2^{n-1}$  карточкам; за  $n - 1$  ход мы либо найдем пару соседних разноцветных, либо выясним, что все они одноцветны. В последнем случае мы знаем, что первые  $2^{n-1} + 1$  и последние  $k - 2^{n-1}$  карточки одноцветны; так как эти множества пересекаются, то все карточки одноцветны. Если же среди первых  $2^{n-1} + 1$  карточек есть разноцветные, то применим предположение индукции к первым  $2^{n-1}$  из них. Мы либо за  $n - 1$  ход найдем разноцветную пару соседних карточек, либо



выясним, что все карточки одноцветны; последнее возможно лишь в случае, когда  $2^{n-1}$ -я и  $(2^{n-1} + 1)$ -я карточки разноцветны, и мы можем указать их.

Предположим теперь, что у Васи есть стратегия при некотором  $k \geq 2^n + 1$ . После  $n$  ходов он может получить  $2^n$  комбинаций ответов, и по каждой комбинации он либо говорит, что все карточки одноцветны (такое должно произойти хотя бы в одном случае), либо указывает пару соседних по кругу; значит, по окончании алгоритма Вася может указать на одну из не более чем  $2^{n-1}$  пар. Таким образом, хотя бы на две пары он никогда не укажет; пусть это пары  $(x, y)$  и  $(z, t)$  ( $y$  и  $t$  стоят по часовой стрелке от  $x$  и  $z$  соответственно). Тогда его алгоритм не работает на расстановке, в которой карточки от  $y$  до  $z$  красные, а от  $t$  до  $x$  – зеленые (см. рисунок).



И. Богданов

**M2386\***. Озеро имеет форму выпуклого многоугольника. В некоторой точке озера находится лодка, а в другой точке растет водяная лилия. Если в некоторый момент лодка находится в точке  $A$ , то за один шаг она может проплыть по направлению к одной из вершин  $B$  многоугольника расстояние, равное  $AB/4$ . Докажите, что можно выбирать на каждом шаге вершины так, чтобы через несколько шагов лодка оказалась на расстоянии менее 1 м от лилии.

Положим  $\delta = 1/4$ . Пусть перед очередным шагом лодка находится в точке  $D$ . Шаг состоит в том, что выбирается вершина  $E$  многоугольника-озера и лодка перемещается в точку  $C = v_E(D)$  такую, что  $\overline{DC} = \delta \overline{DE}$ . По точке  $C = v_E(D)$  можно однозначно восстановить точку  $D = \mu_E(C)$  по правилу:  $\overline{ED} = \frac{1}{1-\delta} \overline{EC}$ , однако точка  $D$  может оказаться за пределами многоугольника.

**Лемма.** Пусть  $C$  – точка внутри или на границе многоугольника. Тогда можно выбрать вершину  $E$  так, что точка  $D = \mu_E(C)$  также лежит внутри или на границе многоугольника.

**Доказательство.** Точка  $C$  лежит внутри или на границе некоторого треугольника  $XYZ$  с вершинами в вершинах многоугольника (нужный треугольник  $XYZ$  можно отыскать, если разрезать наш многоугольник на треугольники). Пусть  $M$  – точка пересечения медиан треугольника. Проведем через  $M$  прямую, параллельную прямой  $YZ$ . Эта прямая отсекает от треугольника  $XYZ$  треугольник  $\Delta_X$ . Треугольник  $XYZ$  можно получить из  $\Delta_X$  гомотетией с центром  $X$  и коэффициентом

$3/2$ . Заметим, что  $\frac{1}{1-\delta} < \frac{3}{2}$ . Это означает, что если  $C$  принадлежит треугольнику  $\Delta_X$ , то точка  $D = \mu_X(C)$  принадлежит треугольнику  $XYZ$ . Аналогично рассмотрим треугольники  $\Delta_Y$  и  $\Delta_Z$ . Так как треугольники  $\Delta_X$ ,  $\Delta_Y$  и  $\Delta_Z$  покрывают треугольник  $XYZ$ , то хотя бы

одна из точек  $\mu_X(C)$ ,  $\mu_Y(C)$ ,  $\mu_Z(C)$  принадлежит треугольнику  $XYZ$ , а значит, и многоугольнику. Лемма доказана.

Теперь мы обратным ходом построим так называемую «магистраль» – последовательность точек  $B_0 = B, B_1, B_2, \dots$ , принадлежащих многоугольнику и таких, что из  $B_{i+1}$  можно попасть в  $B_i$  за один шаг, т.е.  $B_{i+1} = \mu_{E_i}(B_i)$  для некоторой вершины  $E_i$ . Тем самым, за несколько шагов из всех точек  $B_i$  можно попасть точно в точку  $B$ .

Теперь «сблизим» реальные перемещения лодки с магистралью. Положим  $A = A_n$  и определим последовательность  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$  по правилу  $A_i = v_{E_i}(A_{i+1})$ . Тогда треугольник  $E_i A_i B_i$  подобен треугольнику  $E_i A_{i+1} B_{i+1}$  с коэффициентом  $1-\delta$ , значит,  $A_i B_i = (1-\delta) A_{i+1} B_{i+1}$ . Отсюда  $A_0 B_0 = (1-\delta)^n A_n B_n$ . Выбирая в предыдущих рассуждениях  $n$  так, чтобы величина  $(1-\delta)^n D$ , где  $D$  – максимальное расстояние между точками многоугольника, была меньше 1 м, получим, что расстояние от  $A_0$  до лилии меньше 1 м, что и требовалось.

Как можно заметить, решение проходит для любого  $\delta < 1/3$ . С другой стороны, при  $\delta > 1/3$  утверждение леммы и утверждение исходной задачи перестают быть верными. Скажем, если озеро имеет форму треугольника, то при  $\delta > 1/3$  лодка не всегда может оказаться достаточно близко к точке пересечения медиан. Отметим, что вариант рассматриваемой задачи (для «озера» в форме квадрата) предлагался в 1989 году на Всесоюзной математической олимпиаде (см. «Квант» №11 за 1989 г.). Интересно провести параллель сюжета этой задачи с «салютом Канеля» из задачи M1309 (см. «Квант» №4 за 1992 г.). В наших терминах, в задаче M1309 утверждается, что для треугольного озера,  $\delta = 1/2$  и данного  $\epsilon > 0$  найдется  $n$  такое, что множество точек  $K_n$ , в которые лодка может попасть не менее чем за  $n$  шагов, может быть накрыто фигурой площади меньше  $\epsilon$ .

В. Ильичев

**M2387\***. Пусть  $p$  – простое число,  $A_k = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ . Докажите, что:

- а) если  $p \geq 7$  и  $k$  – нечетное число такое, что  $3 < k < p$ , то  $kpA_{k-1} - 2A_k$  делится на  $p^4$ ;
- б) если  $p \geq 5$ , то  $p^2 A_{p-1} - 2A_p$  делится на  $p^5$ .

См. статью И. Вайнштейна «Симметрические многочлены и делимость на  $p^s$ » в этом номере журнала.

**M2388\***. Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусом  $S$ . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников  $ABC$ , где  $AB$  – хорда окружности, касающаяся эллипса.

Пусть  $CH$  – высота треугольника  $ABC$ . Нам потребуется единственный известный факт, связанный с эллипсом: точка  $H$  пробегает окружность (диаметром которой является большая ось эллипса). Докажем его в конце решения.

Обозначим центр и радиус данной окружности через  $O$

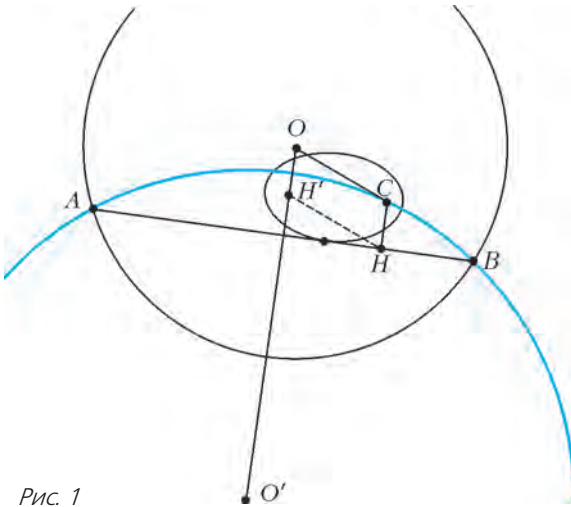


Рис. 1

и  $R$ , а центр окружности  $ABC$  через  $O'$  (рис.1). Применяя теорему косинусов к треугольникам  $AO'O$  и  $OO'C$ , получаем

$$R^2 = O'A^2 + O'O^2 - 2O'A \cdot O'O \cos \angle AO'O, \quad (1)$$

$$OC^2 = O'C^2 + O'O^2 - 2O'C \cdot O'O \cos \angle CO'O. \quad (2)$$

Заметим, что  $O'O \parallel CH$ , а  $O'C \cos \angle CO'O$  и  $O'A \cos \angle AO'O$  – проекции отрезков  $O'C$  и  $O'A$  на прямую  $OO'$ , взятые со знаком «+» или «-», поэтому  $O'C \cos \angle CO'O - O'A \cos \angle AO'O = CH$ .

Поскольку  $O'A = O'C$ , то, вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем  $R^2 - OC^2 = 2OO' \cdot CH$ . Пусть точка  $H$  при параллельном переносе на вектор  $\vec{CO}$  переходит в точку  $H'$ . Так как  $H$  пробегает окружность, точка  $H'$  также пробегает равную ей окружность  $\gamma$ . Точка  $H'$  лежит на луче  $OO'$  и произведение  $OH' \cdot OO' = \frac{R^2 - OC^2}{2}$  не зависит от выбора хорды  $AB$ . Следовательно, точка  $H'$  переходит в  $O'$  при инверсии относительно окружности с центром  $O$  радиуса  $\sqrt{\frac{R^2 - OC^2}{2}}$ . Так как  $H'$  пробегает окружность  $\gamma$ , не проходящую через  $O$ , точка  $O'$  также пробегает окружность (образ окружности  $\gamma$  при инверсии).

Остается доказать вспомогательный факт. Пусть  $S$  и

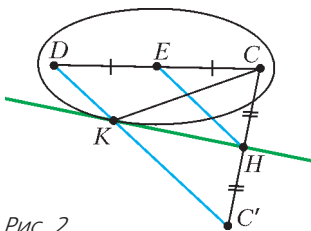


Рис. 2

$D$  – фокусы эллипса,  $E$  – центр эллипса,  $K$  – точка касания,  $H$  – проекция фокуса  $C$  на касательную, точка  $C'$  симметрична  $C$  относительно  $H$  (рис.2). Согласно оптическому свойству эллипса,  $C', K$  и  $D$  лежат на одной прямой.

Значит,  $HE$  – средняя линия треугольника  $CC'D$ , тем самым,

$$HE = C'D/2 = (C'K + KD)/2 = (CK + KD)/2.$$

Для всех точек  $K$  на эллипсе величина  $CK + KD$  равна  $2a$ , где  $a$  – длина большой полуоси эллипса, поэтому  $HE = a$ .

А.Заславский

**Ф2388.** Солнце, Земля и Луна «выстроились» вдоль одной линии. Куда направлено ускорение Луны относительно далеких звезд? Каково отношение величин ускорений Луны в моменты лунного и солнечного затмений? Расстояние от Земли до Солнца  $L = 150$  млн км, расстояние от Земли до Луны  $D = 380$  тыс. км.

Поскольку предлагается найти ускорения относительно далеких звезд, то периоды обращений небесных тел по их орбитам следует брать сидерические, или звездные. Всем известно, что Солнце значительно массивнее Земли, а Земля значительно массивнее Луны. Кроме того, расстояния между этими телами тоже значительно отличаются друг от друга. Земля вместе с Луной делает оборот вокруг Солнца за время  $T = 1$  год = 365,2564 суток, а Луна делает оборот вокруг Земли за время  $t = 27,3216$  суток (сидерический период). Ускорение Луны, как и ускорение Земли, которое обеспечивается притяжением Солнца, равно

$$a_{Л-С} = \Omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L = 0,005946 \text{ м/с}^2.$$

Дополнительное ускорение Луны, связанное с притяжением Луны к Земле, равно

$$a_{Л-З} = \omega^2 D = \frac{4\pi^2}{t^2} D = 0,002692 \text{ м/с}^2.$$

Силы и, соответственно, ускорения складываются как векторы. Получается, что ускорение Луны и в момент лунного, и в момент солнечного затмения направлено к Солнцу. Отношение модулей ускорений Луны в такие моменты равно

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_{Л-С} + a_{Л-З}}{a_{Л-С} - a_{Л-З}} \approx 2,65.$$

А.Лукин

**Ф2389.** Концы однородной цепочки длиной  $L$  и массой  $M$  закреплены, и цепочка, состоящая из множества звеньев, свободно висит в воздухе. Касательные к цепочке в местах крепления концов составляют с горизонтом углы  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Каково натяжение цепочки в самой нижней ее точке? Какова разность уровней (по вертикали) точек, в которых находятся самое верхнее и самое нижнее звенья цепочки?

Цепочка висит неподвижно, поэтому сумма действующих на цепочку сил равна нулю. Обозначим силы, приложенные к концам цепочки, через  $F_\alpha$  и  $F_\beta$ . Из условий статики следует, что

$$F_\alpha \cos \alpha = F_\beta \cos \beta,$$

$$F_\alpha \sin \alpha + F_\beta \sin \beta = Mg.$$

Отсюда можно найти величины этих сил:

$$F_\alpha = \frac{Mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$F_\beta = \frac{Mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

В самой нижней точке цепочка натянута с силой

$$F_H = F_\alpha \cos \alpha = F_\beta \cos \beta = \frac{Mg}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$



Если звенья цепочки находятся на разных по вертикали уровнях и разница уровней равна  $h$ , то разность сил натяжения цепочки равна  $Mgh/L$ . Это легко доказать. Например, так. Предположим, что такая же цепочка, т.е. с таким же отношением  $M/L$ , перекинута через два маленьких блока, которые расположены так же, как и места крепления нашей цепочки, цепочка длинная и свободные ее участки лежат на горизонтальных гладких поверхностях, примыкающих к блокам. Чтобы удерживать цепочку неподвижной, нужно к ее концам прикладывать силы. Возле блоков висящая часть цепочки натянута, очевидно, с точно такими же силами, как и в нашей задаче. Медленно «сравим» с одной из плоскостей участок цепочки длиной  $l$  и одновременно «вытянем» на другую поверхность такой же по длине участок. Кинетическая энергия цепочки осталась равной нулю, а внешние силы совершили работу  $F_{\text{вн}} l = |F_{\alpha} - F_{\beta}| l$ . Эта работа пошла на то, чтобы изменить потенциальную энергию цепочки в поле тяжести Земли на  $(Ml/L)gh$ .

С учетом того, что  $\alpha > \beta$ , получим

$$\frac{Mgh}{L} = F_{\alpha} \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right).$$

Отсюда найдем разность уровней  $h$  для самого верхнего и самого нижнего звеньев цепочки:

$$h = \frac{F_{\alpha} L}{Mg} \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) = L \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

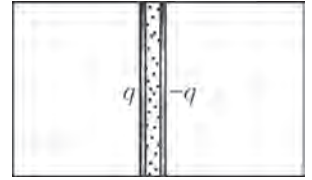
Ц.Почкин

**Ф2390.** Горизонтальная плоская поверхность разделена прямой линией на две части. По одну сторону от прямой поверхность абсолютно гладкая, по другую – шероховатая, причем коэффициент трения  $\mu$  в каждой ее точке пропорционален расстоянию от этой точки до разделительной прямой. Две одинаковые маленькие шайбы движутся поступательно по гладкой части поверхности перпендикулярно разделительной прямой и одновременно пересекают ее. Какая шайба остановится раньше, если скорость первой шайбы в 10 раз больше скорости второй?

Задача успешно решается, если составить дифференциальные уравнения движения шайб. Но, оказывается, получить ответ можно вообще без всяких вычислений, если заметить, что движение каждой шайбы с момента пересечения линии и до полной остановки происходит с ускорением, равным  $\mu g$  и направленным «назад» к разделительной линии, причем величина ускорения пропорциональна расстоянию от шайбы до разделительной линии. Совершенно аналогично в течение одной четверти периода происходят колебания груза на пружинке или математического маятника при малых отклонениях от положения равновесия. А теперь достаточно вспомнить, что период таких колебаний не зависит от амплитуды колебаний (при малых амплитудах), и потому обе шайбы остановятся одновременно (хотя первая успеет пройти большее расстояние по шероховатой части).

И.Акулич

**Ф2391.** Два проводящих диска, заряженных зарядами  $q$  и  $-q$ , могут двигаться без трения в длинном непроводящем цилиндре, расположенном горизонтально (см. рисунок). Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет. Заряды дисков мгновенно уменьшаются вдвое, после чего ожидается система в равновесии. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменятся температура газа и расстояние между дисками.



Примем, что расстояние  $d$  между дисками значительно меньше их линейных размеров  $\sqrt{S}$ , где  $S$  – площадь диска. Тогда можно считать, что каждый диск создает в месте расположения другого диска электрическое поле напряженностью  $E = q/(2\epsilon_0 S)$ . Поэтому сила взаимного притяжения дисков и энергия их взаимодействия равны, соответственно,  $q^2/(2\epsilon_0 S)$  и  $q^2 d/(2\epsilon_0 S)$ . От сближения диски удерживаются силами давления находящегося между дисками гелия, которые равными  $pS$ . Гелий подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона  $pSd = \nu RT$ , а его внутренняя энергия равна  $(3/2)\nu RT$ .

Запишем условия равновесия дисков в начальный и конечный моменты времени, когда система находится в равновесии:

$$\frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = p_1 S, \text{ где } p_1 S d_1 = \nu R T_1,$$

$$\frac{(q/2)^2}{2\epsilon_0 S} = p_2 S, \text{ где } p_2 S d_2 = \nu R T_2.$$

Когда заряды на пластинах мгновенно уменьшаются вдвое, система скачком теряет энергию, но потом до установления нового равновесия энергия системы не меняется. Иными словами, остается неизменной сумма внутренней энергии газа и энергии электрического поля:

$$\frac{3}{2} \nu R T_1 + \frac{(q/2)^2 d_1}{2\epsilon_0 S} = \frac{3}{2} \nu R T_2 + \frac{(q/2)^2 d_2}{2\epsilon_0 S}.$$

Из полученных соотношений найдем изменения температуры газа и расстояния между дисками:

$$\frac{T_2}{T_1} = 0,7 \text{ и } \frac{d_2}{d_1} = 2,8.$$

А.Черноуцан

**Ф2392.** На столе на высокой непроводящей подставке закреплен маленький шарик с зарядом  $Q$ . На другой подставке такой же высоты, которая находится на расстоянии  $L$  от первой, закреплен шарнир. В шарнир вставлен и может свободно вращаться невесомый стержень, длина которого много меньше  $L$ . На концах этого стержня закреплены два маленьких шарика массой  $m$  каждый с зарядами  $+q$  и  $-q$ . Расстояния от шариков до оси вращения одинаковы. Диполь – два шарика с разными зарядами на стержне – раскрутили, и он начал быстро вращаться. Период обращения диполя равен  $T$ . Заряд  $Q$  и заряды  $+q$  и  $-q$  всегда

находятся в одной и той же горизонтальной плоскости. С какой средней по времени силой взаимодействуют точечный заряд и диполь?

В условии сказано, что диполь вращается быстро, из чего можно сделать вывод, что угловая скорость его вращения изменяется мало. Пусть  $\omega$  – угловая скорость вращения диполя в момент, когда стержень диполя перпендикулярен отрезку, на концах  $A$  и  $B$  которого находятся точечный заряд  $Q$  и центр окружности, по которой движутся шарики диполя. В этот момент потенциальную энергию взаимодействия точечного заряда и диполя будем считать равной нулю. Тогда в моменты времени, когда стержень параллелен отрезку  $AB$ , его угловая скорость либо больше, либо меньше  $\omega$  – это связано с взаимодействием электрических зарядов. В эти моменты потенциальная энергия взаимодействия диполя с точечным зарядом равна  $\pm 2kQqd/L^2$ , где  $d$  – расстояние от зарядов  $+q$  и  $-q$  до середины стержня. Сумма потенциальной и кинетической энергий сохраняется, поэтому можно записать

$$2 \frac{kQqd}{L^2} + 2 \frac{m\omega_{\min}^2 d^2}{2} = 2 \frac{m\omega_{\max}^2 d^2}{2} - 2 \frac{kQqd}{L^2} = 2 \frac{m\omega^2 d^2}{2}.$$

Быстрое вращение означает, что  $(\omega_{\max} - \omega_{\min})/\omega \ll 1$ , а следовательно,  $2kQqd/L^2 \ll m\omega^2 d^2$ . Обозначим через  $\beta$  отношение этих двух величин:

$$\beta = \frac{2kQqd/L^2}{m\omega^2 d^2} = \frac{2kQq/L^2}{m\omega^2 d} \ll 1.$$

Если угол, составленный стержнем и отрезком  $AB$ , равен  $\alpha$ , то потенциальная энергия взаимодействия диполя с точечным зарядом равна  $-(2kQqd/L^2)\cos\alpha$ , и угловую скорость  $\omega_\alpha$  можно найти из соотношения

$$-\frac{2kQqd}{L^2}\cos\alpha + m\omega_\alpha^2 d^2 = m\omega^2 d^2,$$

откуда

$$\frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} = 1 + \beta \cos\alpha, \text{ и } \omega_\alpha = \omega \left( 1 + \frac{\beta \cos\alpha}{2} \right).$$

Для поворота стержня на угол  $\Delta\alpha$  требуется время  $\Delta t = \Delta\alpha/\omega_\alpha$ . В течение этого времени на диполь со стороны электрического поля, созданного точечным зарядом  $Q$ , действует сила  $F$ , зависящая от угла  $\alpha$ . Действительно, при  $\alpha \neq \pi/2$  один из зарядов ( $+q$  или  $-q$ ) находится ближе к заряду  $Q$ , поэтому суммарная сила не равна нулю:

$$F(\alpha) = \frac{kQq}{(L+d\cos\alpha)^2} - \frac{kQq}{(L-d\cos\alpha)^2} \approx -\frac{4kQqd}{L^3}\cos\alpha = -F_0 \cos\alpha.$$

Импульс этой силы за время действия  $\Delta t$  равен

$$F(\alpha)\Delta t = F(\alpha)\frac{\Delta\alpha}{\omega_\alpha} = -\frac{F_0}{\omega} \left( 1 - \frac{\beta \cos\alpha}{2} \right) \cos\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Средняя за период  $T = 2\pi/\omega$  по времени сила взаимодействия, которая будет соответствовать *отталкива-*

нию точечного заряда и диполя, получится такой:

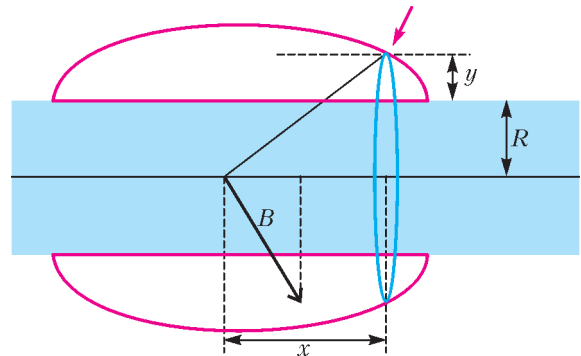
$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} F(\alpha) dt(\alpha) = \beta \frac{F_0}{2\omega T} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \beta \frac{F_0}{4} = \frac{(kQqT)^2}{2\pi^2 mL^5},$$

где  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  – это электрическая постоянная. Как видно, средняя сила не зависит от длины стержня.

С.Варламов

**Ф2393.** Вася получил такое задание: на длинный диэлектрический цилиндр с внешним радиусом  $R$  намотать тонкую проволоку фиксированной длины так, чтобы в одной из точек на оси симметрии цилиндра можно было создать максимальную индукцию магнитного поля при пропускании по проволоке фиксированного постоянного тока. Когда задание было выполнено, оказалось, что максимальная толщина  $h$  всех слоев проволоки на цилиндре равна  $R$ . Каким при этом оказалось максимальное расстояние между витками намотки вдоль оси цилиндра?

Задание Васе поставлено так, что он должен выбрать форму намотки. Условие максимальности поля в одной точке сводится к тому, что каждый виток проволоки должен создавать в выбранной точке на оси цилиндра магнитное поле, параллельное оси цилиндра, и все витки, находящиеся на самом верш, должны давать одинаковый вклад в магнитное поле в этой точке. Если бы это было не так, то существовали бы витки самого верхнего слоя с разными вкладами в поле в выбранной точке, тогда виток с самым малым вкладом можно было бы разместить в другом месте, где его вклад стал бы больше. На рисунке голубым цветом показан цилиндр,



а красными изогнутыми линиями отмечено положение поверхностных витков намотки. От каждого из них, где бы он ни находился, вклад в поле в выбранной точке на оси один и тот же. Пусть точка, в которой нужно получить максимальное поле, это начало координат, а нужный нам виток из тонкой проволоки на поверхности намотки (синяя линия) имеет координату  $x$  вдоль оси цилиндра и координату  $R + y$  поперек оси цилиндра. Вклад в магнитное поле от этого витка при токе  $i$  в витке пропорционален току и определенной функции координат. Красная стрелка на рисунке указывает расположение небольшого участка витка проволоки, в котором положительные носители движутся перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», а черной



стрелкой показано магнитное поле  $B$ , созданное этим участком в точке на оси цилиндра. При суммировании вкладов от всех участков этого витка сложатся их проекции на ось цилиндра, а все поперечные к оси цилиндра составляющие полей скомпенсируют друг друга.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа, вклад в магнитное поле от этого витка пропорционален току, длине витка, косинусу угла, который составляют с осью цилиндра векторы индивидуальных вкладов малых участков этого витка, и обратно пропорционален квадрату расстояния от точки на оси до точек витка:

$$\Delta B \sim i \frac{2\pi(R+y)}{(R+y)^2 + x^2} \frac{R+y}{\sqrt{(R+y)^2 + x^2}} = i \frac{2\pi(R+y)^2}{((R+y)^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Из условия максимальности полученного поля следует, что все витки, находящиеся на поверхности намотки, создают одинаковые вклады в магнитное поле в нужной точке. Отсюда вывод: для всех таких витков должно выполняться равенство

$$\frac{(R+y)^2}{((R+y)^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{R+h}.$$

Подставив в это равенство значение  $y = 0$ , найдем  $x$ :

$$x = \sqrt{(R^4(R+h)^2)^{1/3} - R^2}.$$

При  $h = R$   $x = R\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,766R$ , а значит, максимальное расстояние между витками намотки вдоль оси цилиндра равно

$$L = 2x \approx 1,53R.$$

*В.Максимов*

**Ф2394.** Симметричная тонкая собирающая линза с оптической силой  $D = 1$  дптр сделана из стекла с показателем преломления  $n = 3/2$ . Линза стоит на подставке посредине оптической скамьи, длина кото-

рой  $L = 4$  м. На каком максимальном расстоянии от линзы на ее главной оптической оси нужно поместить на скамью очень маленький источник света, чтобы одно из его действительных изображений попало в один из фокусов линзы?

*Подсказка.* На границах раздела воздух–стекло происходит частичное отражение света.

У симметричной линзы радиусы кривизны поверхностей  $R$  одинаковые. Их можно найти из выражения для оптической силы линзы:

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right).$$

Для данного в условии коэффициента преломления стекла  $n = 3/2$  радиусы линзы равны  $R = 1/D = 1$  м. Эта величина совпадает с фокусным расстоянием линзы. Свет от источника, попав на линзу, будет, во-первых, преломляться в ней, а во-вторых, отражаться от ее поверхностей, как от сферических зеркал. Если свет внутри линзы испытал  $N$  отражений, то можно сказать, что он испытал воздействие суммарной «оптической силы», равной  $N/R + (N+1)D$ . Из условия, что изображение попадает в фокус линзы, получаем соотношение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{R} = \frac{N}{R} + (N+1)D.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{1}{2ND}.$$

При минимальном числе отражений  $N = 1$  расстояние от точечного источника света до линзы будет самым большим:

$$x = 0,5 \text{ м.}$$

При этом изображение попадает в фокус линзы, расположенный по ту же сторону от линзы, что и источник света. Коэффициент отражения света стеклом невелик, поэтому доля от всего светового потока, формирующая это изображение, невелика, т.е. изображение не очень яркое. Но увидеть его можно!

*В.Сергеев*

### Симметрические многочлены и делимость на $p^s$

*И.Вайнштейн*

На протяжении всей статьи  $p$  будет обозначать некоторое простое число. Для начала вспомним старую олимпиадную задачу.

**Задача 1.** Пусть  $p > 2$ . Пусть сумма  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$  равна  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа. Докажите, что  $m$  делится на  $p$ .

**Решение.** Решить эту задачу можно, разбив слагаемые на пары:  $\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}$ , ... Сложим дроби в

каждой паре:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{p-t} = \frac{(p-t)+t}{t(p-t)} = \frac{p}{t(p-t)}.$$

Как видим, получается дробь с числителем  $p$ , причем она несократима (поскольку  $1 \leq t \leq p-1$ ,  $1 \leq p-t \leq p-1$ , а  $p$  – простое число). Теперь ясно, что после приведения к общему знаменателю и сложению несократимых дробей вида  $\frac{p}{t(p-t)}$  в результате получим дробь, числитель которой делится на  $p$ .

**Упражнение 1.** Докажите, что числа  $\frac{(p-1)!}{1}$ ,  $\frac{(p-1)!}{2}$ , ...,  $\frac{(p-1)!}{p-1}$  дают различные ненулевые остатки при делении на  $p$ . Получите отсюда еще одно решение задачи 1.

Посмотрим на выражение, которое получится в числителе дроби после приведения к общему знаменателю  $(p-1)!$  и сложения дробей  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p-1}$ . Оно равно

$$\frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \dots + \frac{(p-1)!}{p-1} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) + 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) + \dots + 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-2)$$

– это сумма произведений чисел из множества  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ , взятых в количестве  $p-2$ . Обозначим коротко эту сумму через  $S_{p-2}$ . Итак, в задаче 1 мы доказали, что  $S_{p-2}$  делится на  $p$ . Оказывается, этот результат можно усилить: при простых  $p > 3$  сумма  $S_{p-2}$  делится на  $p^2$ .<sup>1</sup> Ниже в задаче 3 мы докажем это, применив некоторый «трюк», немного напоминающий парное соответствие из решения задачи 1. Также мы установим некоторые другие интересные факты о делимости симметрических выражений относительно  $1, 2, \dots, p-1$  на степени простого числа  $p$  и, в частности, приведем решение задачи M2387 из Задача-ника «Кванта».

Сумма  $S_{p-2}$ , которую мы встретили выше, равна значению выражения

$$s_{n-1}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n$$

при  $n = p-1$  и  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{p-1} = p-1$ . Выражение  $s_{n-1} = s_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$  является *симметрическим* относительно  $x_1, \dots, x_n$ , т.е. не изменяется после обмена любых двух переменных. Аналогично можно определить симметрическое выражение  $s_k(x_1, \dots, x_n)$  для всякого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  как сумму произведений переменных из множества  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , взятых по  $k$ . Выражения  $s_k = s_k(x_1, \dots, x_n)$  называют *элементарными симметрическими функциями*. Так,

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$$

$$\dots$$

$$s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Элементарные симметрические функции естественным образом появляются как коэффициенты многочлена  $(x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n)$  (коэффициент при  $x^{n-k}$  равен  $s_k$ ). Ниже для  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  положим  $S_k = s_k(1, 2, \dots, p-1)$  (это обозначение согласуется с введенным выше  $S_{p-2}$ ).

Обобщим утверждение задачи 1.

**Задача 2.** Докажите, что для простого числа  $p > 2$  суммы  $S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$  делятся на  $p$ .

**Решение.** Мы будем пользоваться следующей теоремой.<sup>2</sup>

*Дан многочлен  $F(x)$  степени  $d$  с целыми коэффициентами, имеющий  $d+1$  «корней» по модулю  $p$ , т.е.*

<sup>1</sup> Вероятно, впервые этот факт был доказан в работе Вольстенхольма (1862 г.). В этой же работе доказан факт из упражнения 2.

<sup>2</sup> Ниже будет сказано, как получить другое решение задачи 2 с помощью задачи 5 и формул Ньютона.

*имеется  $d+1$  различных остатков  $x_0, x_1, \dots, x_d \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  таких, что  $F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_d) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  таких, что  $F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_d)$  делятся на  $p$  (иначе говоря,  $F(x_0) \equiv F(x_1) \equiv \dots \equiv F(x_d) \equiv 0 \pmod{p}$ ). Тогда все коэффициенты многочлена  $F(x)$  делятся на  $p$ .*

«Профессиональный» алгебраист скажет, что это просто теорема о том, что количество корней многочлена не превышает его степени, только не для обычных многочленов, а для многочленов над полем  $\mathbb{Z}_p$ . В конце решения мы приведем элементарное доказательство этой теоремы.

Итак, для решения задачи рассмотрим вспомогательный многочлен

$$P(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+(p-1)) =$$

$$= x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + \dots + S_{p-2} x + S_{p-1}.$$

Заметим, что числа  $P(1), P(2), \dots, P(p-1)$  делятся на  $p$ , иначе говоря

$$P(1) \equiv P(2) \equiv \dots \equiv P(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Запишем еще один многочлен  $Q(x) = x^{p-1} - 1$ . Согласно малой теореме Ферма, он обладает аналогичным свойством:

$$Q(1) \equiv Q(2) \equiv \dots \equiv Q(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Разность

$$P(x) - Q(x) = S_1 x^{p-2} + \dots + S_{p-2} x + (S_{p-1} + 1)$$

– многочлен степени  $p-2$ , имеющий  $p-1$  «корней» по модулю  $p$ . Остается сослаться на теорему и получить, что  $S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$  делятся на  $p$ . (Кроме того, свободный член  $S_{p-1} + 1 = (p-1)! + 1$  делится на  $p$ , тем самым попутно мы доказали теорему Вильсона.)

Как обещано, докажем теорему.

Индукция по  $d$ . База  $d = 0$  очевидна. Выполним индукционный переход. Пусть  $F$  – многочлен степени  $d$  из условия теоремы. Разделим  $F(x)$  на  $x-x_0$  с остатком:  $F(x) = G(x)(x-x_0) + r$ , где  $G$  – многочлен с целыми коэффициентами степени  $d-1$ , а  $r$  – целое число. Подставляя  $x = x_0$ , получаем, что  $F(x_0)$  делится на  $p$ . Далее, подставляя  $x = x_1, \dots, x = x_d$ , получаем, что числа  $G(x_1)(x_1-x_0), \dots, G(x_d)(x_d-x_0)$  делятся на  $p$ . Так как  $p$  – простое и разности  $x_1-x_0, \dots, x_d-x_0$  не делятся на  $p$ , то  $G(x_1) \equiv G(x_2) \equiv \dots \equiv G(x_d) \pmod{p}$ , значит по предположению индукции все коэффициенты многочлена  $G(x)$  делятся на  $p$ . Из равенства  $F(x) = G(x)(x-x_0) + r$  получаем то же утверждение и для многочлена  $F(x)$ .

Мы готовы сделать следующий шаг.

**Задача 3.** Пусть  $p > 3$ . Докажите, что суммы  $S_3, S_5, \dots, S_{p-2}$  делятся на  $p^2$ .

**Решение.** Пусть  $k$  – нечетный индекс,  $3 \leq k \leq p-2$ . Каждому слагаемому вида  $x_1 x_2 \dots x_k$  в сумме  $S_k$  поставим в соответствие слагаемое  $(p-x_1)(p-x_2)\dots(p-x_k)$  (каждый сомножитель  $x_i$  заменяется на «парный»: 1 заменяется на  $p-1$ , 2 – на  $p-2$ , ...,  $p-1$  – на 1). Если просуммируем слагаемые вида  $(p-x_1)(p-x_2)\dots(p-x_k)$  по всем  $k$ -элементным подмножествам множества  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ , то получим ту



же самую сумму  $S_k$ . В этом и будет состоять наш «трюк»!

Раскрытие скобок в произведении  $(p-x_1)(p-x_2)\dots(p-x_k)$  дает

$$(p-x_1)(p-x_2)\dots(p-x_k) = p^k - p^{k-1}s_1(x_1, \dots, x_k) + p^{k-2}s_2(x_1, \dots, x_k) - \dots + p^3s_{k-3}(x_1, \dots, x_k) - p^2s_{k-2}(x_1, \dots, x_k) + ps_{k-1}(x_1, \dots, x_k) - s_k(x_1, \dots, x_k). \quad (1)$$

(Отметим, что последнее выражение в правой части со знаком «-», поскольку  $k$  нечетно.) Рассмотрим какое-то конкретное произведение из  $t$  сомножителей, например  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot t$ . Множество  $\{1, 2, \dots, t\}$  можно дополнить  $C_{p-1-t}^{k-t}$  способами до  $k$ -элементного подмножества в множестве  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ , поэтому наше произведение  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot t$  входит в  $C_{p-1-t}^{k-t}$  сумм вида  $s_t(x_1, \dots, x_k)$ . Значит, после суммирования равенств (1) по всем  $k$ -элементным подмножествам множества  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  имеем

$$S_k = C_{p-1}^k p^k - C_{p-2}^{k-1} p^{k-1} S_1 + C_{p-3}^{k-2} p^{k-2} S_2 - \dots + C_{p-k+2}^3 p^3 S_{k-3} - C_{p-k+1}^2 p^2 S_{k-2} + C_{p-k}^1 p S_{k-1} - S_k. \quad (2)$$

Все слагаемые правой части (2), кроме двух последних, заведомо делятся на  $p^2$ , поэтому  $2S_k - C_{p-1}^k p S_{k-1}$  делится на  $p^2$ . Пользуясь тем, что  $S_{k-1}$  делится на  $p$  (см. задачу 2, здесь важно, что  $k \geq 3$ ), получаем, что  $2S_k$  делится на  $p^2$ , откуда  $S_k$  делится на  $p^2$ .

Из равенства (2) можно получить некоторые факты о делимости симметричных выражений от  $1, 2, \dots, p-1$  и на более высокие степени  $p$ . Решим следующую задачу такого сорта.

**Задача 4.** Пусть  $p > 5$ . Докажите, что  $pS_{p-3} - S_{p-2}$  делится на  $p^4$ .

**Решение.** Используем (2) для  $k = p-2$ . Все выражения в правой части (2), кроме двух последних, заведомо делятся на  $p^4$ , поэтому (после переноса  $S_{p-2}$  в правую часть) имеем

$$C_4^3 p^3 S_{p-5} - C_3^2 p^2 S_{p-4} + C_2^1 p S_{p-3} - 2S_{p-2}$$

делится на  $p^4$ . Так как  $S_{p-5}$  делится на  $p$  (см. задачу 2, здесь важно, что  $p > 5$ ), а  $S_{p-4}$  делится на  $p^2$  (так как  $p-4 \geq 3$  и нечетно – см. задачу 3), получаем, что  $2pS_{p-3} - 2S_{p-2}$  делится на  $p^4$ , поэтому  $pS_{p-3} - S_{p-2}$  делится на  $p^4$ .

Наряду с симметрическими выражениями  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно для любого  $k = 0, 1, 2, \dots$  рассмотреть  $a_k = a_k(x_1, \dots, x_n)$  – сумму  $k$ -х степеней переменных  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= n, \\ a_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ a_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ a_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Положим

$$A_k = a_k(1, 2, \dots, p-1) = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k.$$

Что касается делимости на  $p$  и  $p^2$ , выражения  $A_k$  имеют свойства, очень похожие на свойства сумм  $S_k$  (см. следующие задачи 5, 6).

Это не случайное совпадение. Ведь симметрические функции  $a_k = a_k(x_1, \dots, x_n)$  и  $s_k = s_k(x_1, \dots, x_n)$  связаны так называемыми *формулами Ньютона*:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ 2s_2 &= s_1 a_1 - a_2, \\ 3s_3 &= s_2 a_1 - s_1 a_2 + a_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для удобства можно положить  $s_0 = 1$  и  $s_{n+1} = s_{n+2} = \dots = 0$ , тогда для каждого  $k = 1, 2, \dots$  формула Ньютона может быть записана в виде

$$k s_k = s_{k-1} a_1 - s_{k-2} a_2 + s_{k-3} a_3 - \dots + (-1)^{k+1} s_0 a_k.$$

Ниже мы приведем решения задач 5, 6, не опирающиеся на задачи 2, 3. Однако в качестве упражнения читатель может, используя формулы Ньютона, установить эквивалентность утверждений задач 2 и 5, а после того – задач 3 и 6.

**Задача 5.** Докажите, что для  $p > 2$  каждая из сумм  $A_1, A_2, \dots, A_{p-2}$  делится на  $p$ .

**Решение.** Для  $A_1$  это ясно:  $A_1 = p \cdot \frac{p-1}{2}$ . Проведем

индуктивное рассуждение. Пусть уже известно, что суммы  $A_1, A_2, \dots, A_k$  делятся на  $p$  (где  $k$  – фиксированное,  $1 \leq k \leq p-3$ ); докажем, что  $A_{k+1}$  тоже делится на  $p$ .

Запишем следующие разложения по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} 2^{k+2} &= (1+1)^{k+2} = 1 + C_{k+2}^1 + C_{k+2}^2 + \dots + C_{k+2}^{k+1} + 1, \\ 3^{k+2} &= (1+2)^{k+2} = \\ &= 1 + C_{k+2}^1 \cdot 2 + C_{k+2}^2 \cdot 2^2 + \dots + C_{k+2}^{k+1} \cdot 2^{k+1} + 2^{k+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{k+2} &= (1+(p-1))^{k+2} = \\ &= 1 + C_{k+2}^1 \cdot (p-1) + C_{k+2}^2 \cdot (p-1)^2 + \dots \\ &\dots + C_{k+2}^{k+1} \cdot (p-1)^{k+1} + (p-1)^{k+2}. \end{aligned}$$

Складывая (по столбцам), получаем

$$\begin{aligned} A_{k+2} - 1 + p^{k+2} &= (p-1) + C_{k+2}^1 \cdot A_1 + \\ &+ C_{k+2}^2 \cdot A_2 + \dots + C_{k+2}^{k+1} \cdot A_{k+1} + A_{k+2}. \end{aligned}$$

После уничтожения  $A_{k+2}$  имеем

$$p^{k+2} = p + C_{k+2}^1 \cdot A_1 + C_{k+2}^2 \cdot A_2 + \dots + C_{k+2}^{k+1} \cdot A_{k+1}.$$

Из предположения индукции нам известно, что все слагаемые, кроме  $C_{k+2}^{k+1} \cdot A_{k+1}$ , делятся на  $p$ , значит, и  $C_{k+2}^{k+1} \cdot A_{k+1}$  делится на  $p$ . Так как  $C_{k+2}^{k+1} = k+2$  не делится на  $p$ , то  $A_{k+1}$  делится на  $p$ .

**Упражнение 2.** Пусть  $p > 3$ . Пусть сумма  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2}$  равна  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа. Докажите, что  $m$  делится на  $p$ .

*Указание:* можно воспользоваться соображением из упражнения 1.

**Задача 6.** Пусть  $p > 2$ . Докажите, что суммы  $A_3, A_5, \dots, A_{p-2}, A_p$  делятся на  $p^2$ .

**Решение.** Проведем «трюк» с заменой  $x^k$  на  $(p-x)^k$ :

$$A_k = 1^k + 2^k + \dots + (p-2)^k + (p-1)^k = \\ = (p-(p-1))^k + (p-(p-2))^k + \dots + (p-2)^k + (p-1)^k.$$

Раскладываем каждое из слагаемых:

$$(p-x)^k = p^k - C_k^1 p^{k-1} x + C_k^2 p^{k-2} x^2 - \dots - x^k$$

(последний знак «-» из-за нечетности  $k$ ). Складывая эти равенства для  $t = 1, 2, \dots, p-1$ , получаем

$$2A_k = (p-1)p^k - C_k^1 p^{k-1} A_1 + C_k^2 p^{k-2} A_2 - \dots \\ \dots + C_k^{k-3} p^3 A_{k-3} - C_k^{k-2} p^2 A_{k-2} + C_k^{k-1} p A_{k-1}. \quad (3)$$

В правой части все выражения, кроме последнего, делятся на  $p^2$ . При  $k \leq p-1$ , по доказанному в задаче 5,  $A_{k-1}$  делится на  $p$ , а при  $k = p$  коэффициент  $C_k^{k-1} = p$ , поэтому в любом случае  $C_k^{k-1} p A_{k-1}$  делится на  $p^2$ , следовательно,  $A_k$  делится на  $p^2$ .

В заключение приведем решение упомянутой в начале заметки задачи из задачника «Кванта». С учетом задела, который у нас теперь есть, сделать это будет уже не так сложно.

**Задача 7 (M2387).** Докажите, что:

а) если  $p \geq 7$  и  $k$  – нечетное число, такое, что  $3 < k < p$ , то  $kpA_{k-1} - 2A_k$  делится на  $p^4$ ;

б) если  $p \geq 5$ , то  $p^2 A_{p-1} - 2A_p$  делится на  $p^5$ .

**Решение.** а) Если  $k$  – нечетное,  $3 < k < p$ , то  $A_{k-2}$  делится на  $p^2$  (задача 6) и  $A_{k-3}$  делится на  $p$  (задача 5), поэтому в правой части (3) все слагаемые, кроме последнего, делятся на  $p^4$ . Отсюда  $C_k^{k-1} p A_{k-1} - 2A_k = kpA_{k-1} - 2A_k$  делится на  $p^4$ .

б) Положим в (3)  $k = p$ . Так как  $A_{p-2}$  делится на  $p^2$  (задача 6) и  $A_{p-3}$  делится на  $p$  (задача 6), а все коэффициенты  $C_p^i$  (где  $1 \leq i \leq p-1$ ) делятся на  $p$ , в правой части (3) все слагаемые, кроме последнего, делятся на  $p^5$ . Отсюда  $C_p^{p-1} p A_{p-1} - 2A_p = p^2 A_{p-1} - 2A_p$  делится на  $p^5$ .

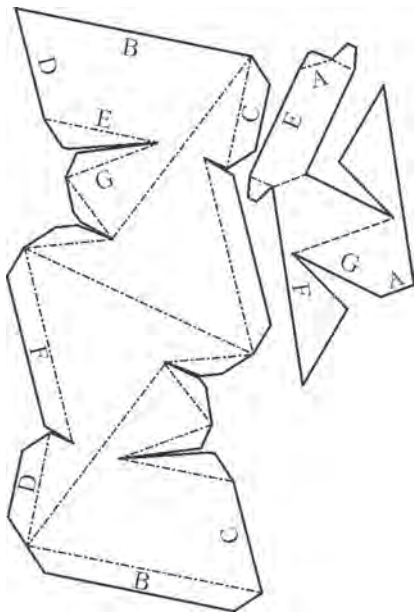
## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Многогранник Силашши

(Начало см. на 2-й странице обложки)

**Теорема о семи красках** утверждает, что для правильной раскраски любой карты на торе (т.е. раскраски, в которой граничащие области покрашены в разные цвета) понадобится не более семи красок.

Многогранник Силашши показывает, что в этой теореме нельзя улучшить верхнюю оценку. Ведь с топологической точки зрения многогранник Силашши – это тор, хотя и немного «угловатый», ребра многогранника разбивают этот тор на области (грани). Любая грань многогранника Силашши имеет общее ребро с каждой из остальных граней, и поэтому потребуется семь разных красок, чтобы правильно покрасить этот многогранник.



Отметим, что тетраэдр служит аналогичным примером для знаменитой **теоремы о четырех красках**, согласно которой любую карту на плоскости или сфере можно правильно раскрасить не более чем четырьмя красками.

Выше мы сказали, что кроме тетраэдра и многогранника Силашши пока не известно других примеров многогранников, у которых любые две грани имеют общую сторону. А что «говорит теория» по этому поводу?

Если в многограннике  $h$  «дырок», то количества его граней ( $f$ ), ребер ( $e$ ) и вершин ( $v$ ) связаны равенством  $f + v - e = 2 - 2h$ . Это – знаменитая формула Эйлера. Например, у многогранника Силашши  $f = 7$ ,  $e = 21$ ,  $v = 14$ , а  $h = 1$  и, как нетрудно убедиться, равенство действительно выполняется. Раз мы требуем, чтобы в многограннике у любых двух граней было общее ребро, то, во-первых, должно выполняться соотношение  $e = f(f-1)/2$ . Во-вторых, в каждой вершине должны сходиться по три ребра (иначе некоторые грани не будут иметь общих границ), откуда, учитывая, что каждое ребро соединяет две вершины, получаем соотношение  $v = 2e/3$ .

Полученные равенства приводят к тому, что число «дырок» и число граней связаны друг с другом так:  $h = (f-4)(f-3)/12$ . Легко видеть, что и тетраэдр ( $h = 0$ ,  $f = 4$ ), и многогранник Силашши ( $h = 1$ ,  $f = 7$ ) согласуются с этой формулой. Следующее решение получается при  $h = 6$  и  $f = 12$ , но пока подходящего многогранника (у него должно быть 44 вершины и 66 ребер!) никто построить не смог.

В заключение предлагаем вам сделать собственную модель многогранника Силашши. Выкройка представлена на рисунке, также ее можно найти на сайте [www.cutoutfoldup.com](http://www.cutoutfoldup.com). Склеивать друг с другом надо участки, подписанные одинаковыми буквами. По линиям, нарисованным обычным пунктиром, нужно делать сгиб, сводя бумагу над выкройкой. По линиям «точка-тире» сгибать нужно наоборот, чтобы получилась «горка». Желаем успехов!

Е.Енифанов



# Задачи

1. Для ремонта пропеллера Карлсону необходимо купить 3 лопасти и 1 винтик. В магазине продаются лопасти по 120 эре и винтики по 9 эре. Но после покупки не менее чем на 250 эре дают скидку 20% на все следующие покупки. Сможет ли Карлсон отремонтировать пропеллер, если у него с собой только 360 эре?

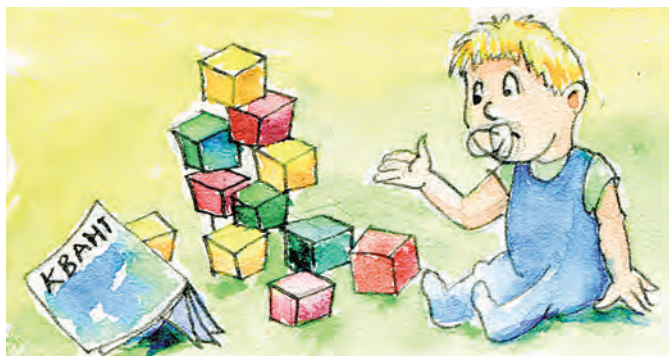
*Е.Бакаев*



2. На верхней грани кубика  $3 \times 3 \times 3$  к центральному квадрату  $1 \times 1$  приклеили кубик  $1 \times 1 \times 1$ . Как разделить получившуюся фигуру на 7 равных?

Один из способов записать ответ — нарисовать отдельно каждый слой фигуры (нижний, средний, верхний и самый верхний кубик) и на каждом кубике написать номер части, к которой он относится.

*Е.Бакаев*

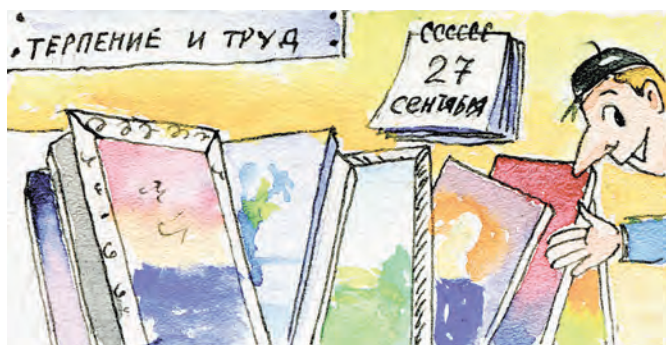


3. У каждого из художников творческого объединения «Терпение и труд» свой рабочий график. Шестеро из них пишут по одной картине раз в два дня, а остальные восемь художников — по одной картине раз в три дня. С 22 по 26 сентября они написали в общей сложности 30 картин. Сколько картин они напишут 27 сентября?

*Е.Бакаев*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXXVIII Турнире имени М.В.Ломоносова.



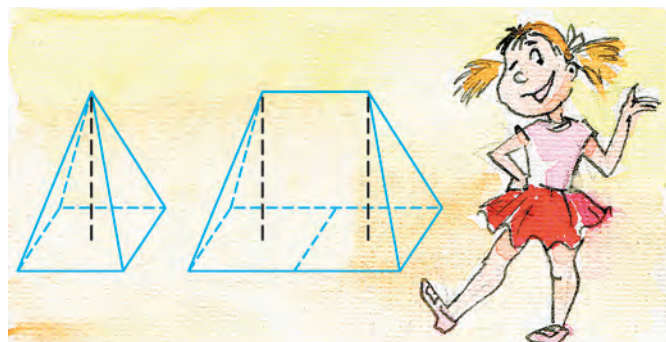
4. Когда у нас мерзнут пальцы, мы дуем на них, чтобы согреть. Когда обжигаем руку, тоже дуем — чтобы охладить. Чем отличаются положения наших губ в этих ситуациях? Почему в одном случае поток воздуха изо рта согревает, а в другом — охлаждает?

*Фольклор*



5. На землю положили квадратную раму, в центре квадрата установили вертикальный шест. Когда на эту конструкцию сверху натянули ткань, получилась маленькая палатка. Если положить рядом вплотную две таких же рамы, в центре каждой поставить вертикальный шест той же длины и натянуть сверху ткань, получится большая палатка. На маленькую палатку ушло 4 квадратных метра ткани. А сколько ткани потребуется для большой палатки?

*М.Раскин*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Петя называет натуральное число *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 20 различных натуральных слагаемых (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

*Фольклор*

7. Рейтинг каждого из 20 шахматистов выражается натуральным числом от 1 до 20, у любых двух рейтинги различны. Шахматисты поделены на две команды по 10 человек так, что суммы рейтингов в командах равны. Команды играют матч-турнир из 100 партий, в котором каждый шахматист играет по одной партии с каждым из 10 шахматистов противоположной команды. В любой партии побеждает шахматист с большим рейтингом, за каждую победу своего игрока команда получает 1 очко. Каков может быть результат матч-турнира?

*П. Кожевников, по мотивам задачи В. Произволова*

8. В «Кванте» № 1 за 1987 год младшим школьникам было предложено расшифровать вот такой ребус, придуманный тогдашним девятиклассником Г.Сафиним, в котором одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры и ни одно число не начинается с нуля:

$$\text{ШЕПНУЛ} \times 5 = \text{КРИКНУЛ}$$

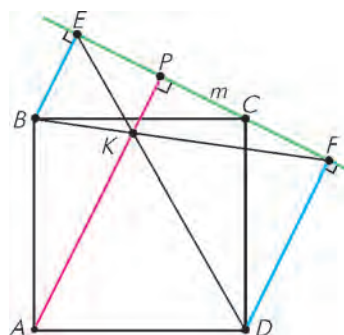
Он имеет два решения, в которых слову ШЕПНУЛ

соответствуют числа 628750 и 682750. Но если пятерку заменить другой цифрой, ребус будет иметь единственное решение. Какая это цифра?

*И. Акулич*

9. Дан квадрат  $ABCD$ . Через вершину  $C$  провели прямую  $m$ , не имеющую других общих точек с квадратом (см. рисунок). Точки  $E$  и  $F$  – проекции точек  $B$  и  $D$  соответственно на прямую  $m$ . Отрезки  $BF$  и  $DE$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $AK$  перпендикулярна прямой  $m$ .

*В. Расторгуев*



10. На квадратном клетчатом поле  $10 \times 10$  расположена эскадра из 10 кораблей. Корабли – это не имеющие общих точек прямоугольники  $1 \times 2$  со сторонами по линиям сетки.

а) Докажите, что можно сделать 32 выстрела так, чтобы наверняка попасть в какой-нибудь корабль.

б) А можно ли обойтись 30 выстрелами?

*А. Бердников, Д. Кузнецов*

## Как дятел Спятел планировал отпуск

**К. КОХАСЬ**

— П ОЧТИ НЕ ОСТАЛОСЬ МЕСТ, ГДЕ МОЖНО спокойно отдохнуть, – жаловался дятел Спятел. – Чтобы отдохнуть на море – летят на юг, за экзотикой – на восток, к благам цивилизации – на запад.

– Суета, толчея, яблоку некуда упасть, – поддакнула мышь Огрыза.

– Экстремалы двигают на север – к медведям и тюленям. Но я хочу провести отпуск не в таких

условиях! Я ищу неисхоженных путей! Я решил полететь туда, куда никто не летит: на северо-восток!

– На северо-восток? – переспросила Огрыза. – Там же ничего нет!

– Вот именно! – воскликнул дятел. – Спокойное тихое место.

– Кстати, а как быстро ты летаешь? – поинтересовалась Бусенька.

– Крейсерская скорость 28 километров в час, – гордо





сказал дятел. – Я могу лететь с этой скоростью хоть целые сутки.

– Любопытно, – сказала Бусенька, – получается, что если ты, к примеру, полетишь прямо сейчас, то через час окажешься в 28 км к северо-востоку отсюда. Это примерно 20 км к северу и 20 км к востоку отсюда. Значит, за час ты смещаешься на 20 км к северу. До северного полюса примерно 3000 км, если будешь лететь по 10 часов в сутки, то недельки через две как раз и доберешься до северного полюса.

– Северный полюс? Вообще-то я не планировал оказаться на северном полюсе... С другой стороны, это же ровно то, что мне нужно! Экстремалы, медведи и тюлени так далеко на север не забираются. А я как раз ищу спокойствия и уединения.

– Странное место – этот ваш северный полюс, – перебила Огрыза, – там со всех сторон юг. Куда ни пойдешь – если не сворачивать, окажется, что движешься к южному полюсу! В наших краях не так – если идти по любому северному азимуту, к примеру двигать по курсу норд-вест-вест, как говорила одна моя знакомая корабельная крыса, обязательно придешь на северный полюс! Бусенька нам это вполне убедительно объяснила. Получается, что у нас пути к северному полюсу занимают половину всех возможных направлений, а другую половину – пути к южному!

– Просто голова идет кругом, – то ли похвалил, то ли пожаловался дятел.

– Еще как идет, – подтвердила Бусенька. – Вот

представь себе, что ты уже почти прилетел на северный полюс, всего несколько километров осталось. Для столь малых расстояний мы можем считать, что земля в этом месте плоская. И вот, к примеру, из точки  $A_1$  ты за 1 минуту перелетел в точку  $A_2$ , которая в 2 раза ближе к северному полюсу, чем  $A_1$ .

– Какой хороший план, – сказал дятел, – пожалуй, именно этим маршрутом я и полечу.

– Погоди, допустим, что на моей (весьма приближенной) картинке угол  $A_1OA_2$  равен  $40^\circ$  (кстати, похоже, он примерно этому и равен). Таким образом, приблизившись к северному полюсу в 2 раза, ты при этом повернешься вокруг земной оси приблизительно на  $40^\circ$ .

– Да, именно так все и будет, – согласился дятел, – но я не буду задерживаться в точке  $A_2$  и полечу дальше.

– И через некоторое время ты повернешься вокруг земной оси еще на  $40^\circ$ , оказавшись при этом в точке  $A_3$ , – сказала Бусенька. – Как ты думаешь, сколько тебе потребуется времени, чтобы добраться до точки  $A_3$ ?

Дятел Спятел задумался.

– Судя по картинке и исходя из здравого смысла, – сказал наконец он, – вот этот кривоватый треугольник  $A_1OA_2$  имеет такую же форму, как треугольник  $A_2OA_3$ . Отличаются они только размерами – у второго треугольника сторона  $OA_2$  в 2 раза меньше, чем соответствующая сторона  $OA_1$  первого треугольника. Значит, и кривая сторона, вдоль которой мне нужно лететь, у него тоже в два раза меньше. Значит, я пролечу ее за полминуты.

– Вот это-то и ужасно! – воскликнула Бусенька.

– Бедный дятлушка, – подхватила Огрыза, – ты бы лучше выбрал какое-нибудь другое место для отдыха. Ведь еще через четверть минуты ты прилетишь в точку  $A_4$ , потом еще через  $1/8$  минуты в точку  $A_5$  и так далее!

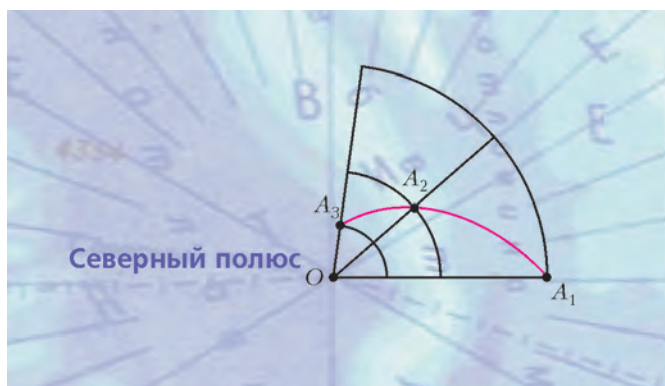
– Вы хотите сказать, что я так и не долечу до северного полюса? Что я так и буду плутать по этим точкам –  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ . Не путайте меня. Историю о том, как черепаха гналась за Ахиллесом, я уже слышал. Если за одну минуту я пролетел половину расстояния до северного полюса, то еще через минуту я уже буду на месте!

– Да, но с какой стороны ты прилетишь? – спросила Бусенька.

– С юго-западной.

– На северном полюсе нет юго-западной стороны, – строго сказала Огрыза. – Вылетев из точки  $A_2$ , ты через полминуты прилетишь в точку  $A_3$ , повернувшись вокруг земной оси на  $40^\circ$ , еще через четверть минуты – опять повернешься на  $40^\circ$ , через  $1/8$  минуты – опять на  $40^\circ$  и так далее. Значит, чтобы достичь северного полюса, тебе придется сделать бесконечно много оборотов! Пару минут назад ты говорил, у тебя голова кружится?

– Ох, – сказал дятел, – очень кружится. Кажется, меня укачало. Вернее, укрутило. Опасное это занятие – летать на северо-восток!





# Гольфстрим, или Как Гренландия согревает Европу

А. СТАСЕНКО

*Гольфстрим – в широком смысле слова мощная система теплых морских течений в Атлантическом океане, охватывающая огромное пространство от Мексиканского залива до берегов Шпицбергена и Кольского полуострова протяжением более 10 тысяч километров... Причина зарождения Гольфстрима еще не установлена.*

Большая советская энциклопедия, том 12

ОКОЛО ДВУХСОТ ЛЕТ НАЗАД АКАДЕМИК ЛЕНЦ (ЛЕНЦ, Эмилий Христианович, 1804–1865), участвовавший в замечательных кругосветных плаваниях русских военных кораблей, предложил простейшую схему циркуляции вод мирового океана, считая его слоем воды постоянной толщины (глубины). Принимая во внимание высокую температуру на поверхности тропических вод и их низкую температуру на глубине, куда они приходят из высоких широт, из условия сохранения потока массы он заключил, что должна возникнуть непрерывная циркуляция воды в океане – факт, который уже давно был известен мореплавателям. (Конечно, реальная картина течений осложнена наличием материков, различием глубин, перемещением воздушных масс, вращением Земли.) Можно проиллюстрировать эту первую кинематическую модель циркуляции в мировом океане простым примером, поместив в одном конце наполненной водой ванны большой кусок льда, а в другом конце (под ванной) организовать подогрев (рис.1).

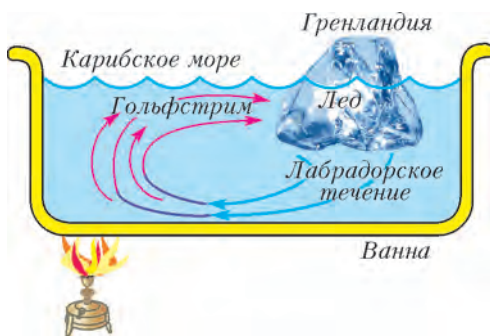


Рис.1. Иллюстрация простейшей кинематической модели циркуляции воды в мировом океане

В системе Солнце–Земля природа тоже позаботилась об энергетике рассматриваемого процесса. Плотность потока излучения от нашего светила на орбите нашей планеты равна  $q = 1400 \text{ Вт/м}^2$ , однако на поверхности планеты за полярным кругом и на экваторе плотности потока существенно различны по двум причинам.

Первая причина чисто геометрическая и связана с углом скольжения  $\varphi$ , равным географической широте (рис.2,а). Возьмем два пучка света одинакового диаметра  $2r$ , много меньшего размеров Земли. Понятно, что мощность потока лучистой энергии в этих пучках одинакова и равна  $q\pi r^2$ . Вблизи экваториальной плоскости она доходит до верхних

слоев атмосферы в том же самом количестве. А вот в приполярной области эта мощность потока приходится на большую площадь, равную  $\pi r^2 / \cos \varphi$ ; следовательно, на каждый квадратный метр попадает меньший, чем у экватора, поток.

Вторая причина этого факта тоже очевидна. «Толщина» атмосферы над всей поверхностью Земли приблизительно одинакова (штриховая линия на рисунке 2,а), но скользкие лучи у полюса проходят в атмосфере заметно больший

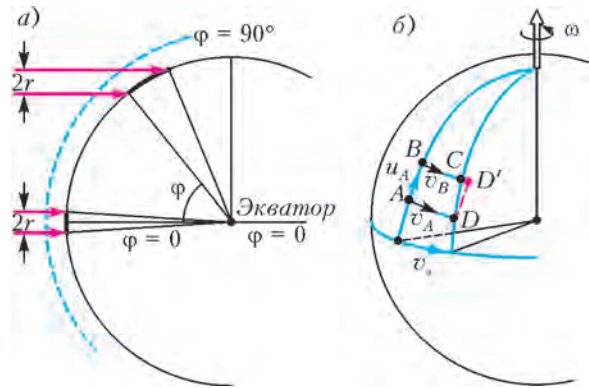


Рис.2. а) Потоки излучения, идущие от Солнца внутри цилиндров одинакового диаметра (красные стрелки), на экваторе и у полюса приходятся на участки поверхности Земли разной площади. Вот почему у полюсов холоднее. б) Частица воды, первоначально движущаяся по меридиану к северу, вследствие вращения Земли отклоняется вправо

путь, чем у экватора, и, следовательно, сильнее рассеиваются (именно из-за рассеяния мы видим голубое небо), так что до поверхности Земли доходит не более  $1000 \text{ Вт/м}^2$ . Тоже немало: если при помощи вогнутого зеркала площадью  $1 \text{ м}^2$  сфокусировать это излучение на чайник, он непременно закипит.

По этим двум причинам льды Гренландии сохраняются, а вода вблизи экватора сильно нагревается.

Но почему холодная вода не течет от Гренландии точно на юг вдоль меридиана, а отклоняется в сторону Северной Америки, т.е. вправо? И почему вытесняемая ею теплая вода не течет точно к Гренландии, а отклоняется в сторону Европы, т.е. опять-таки вправо? Этот замечательный факт объясняется инертностью движущейся массы и вращением Земли. Поясним это рисунком 2,б.

Пусть в начальный момент времени некая частица находится в точке А, обладая скоростью  $u_A$  вдоль меридиана. Если бы Земля не вращалась, то через некоторое время эта частица оказалась бы в точке В на том же меридиане. Теперь учтем вращение Земли с угловой скоростью  $\omega$ , которое приводит к переносу точки А в точку В, а точки В – в С. Понятно, что скорость переноса  $v_A$  точки А больше, чем скорость переноса  $v_B$  точки В – просто потому, что точка А отстоит от оси вращения дальше, чем В. Если бы кто-то заставил частицу перемещаться из А в В строго вдоль меридиана, то она через рассматриваемый отрезок времени попала бы в точку С. Однако, поскольку частица воды «свободна», она по инерции стремится сохранить скорость  $v_A$  и, попав на параллель ВС, оказывается в точке D', лежащей правее С. Похоже на то, как если бы в системе вращающейся Земли на эту частицу в процессе движения подействовала сила, направленная вправо. Это – сила инерции, называемая силой Кориолиса (Кориолис, Гаспар-Гюстав, 1792–1843). Легко видеть, что соответствующее ей ускорение  $a_K$  должно зависеть как от  $\omega$ , так и от линейной

скорости частицы  $v_A$  относительно поверхности; а соотношение размерности дает величину, пропорциональную их произведению:

$$a_K \sim \omega v_A.$$

Это стремление движущихся масс отклоняться на вращающейся Земле было отмечено на примере рек и даже получило название закона Бэра (Бэр, Карл, 1792–1876). Действительно, в северном полушарии правые берега рек оказываются крутыми под действием текущей воды, стремящейся отклониться вправо – независимо от того, течет река на север или на юг или даже вдоль параллели. Именно на правых берегах крупных рек с древних времен расцвели города. Легко понять, что в южном полушарии крутыми должны быть левые берега рек.

Таким образом, слегка усовершенствованная идея Ленца в применении к теории возникновения Гольфстрима выглядит приблизительно так, как изображено на рисунке 3.

В результате получается, что не только излучение Солнца, но и вращение Земли, и льды Гренландии согревают Европу! А если лед растает, то исчезнет Гольфстрим и в Европе наступит ледниковый период?!

Конечно, реальная картина гораздо сложнее, и для ее объяснения наверняка написаны тысячи диссертаций и специальных монографий. Из них можно узнать о Ньюфаундлендской банке и холодном Лабрадорском течении, о Флоридском проливе, о восточном пассате, дующем вблизи экватора из Африки и нагнетающем воду в Мексиканский залив. И о том, что Гольфстрим, пересекая Атлантику,



Рис.3. Упрощенная схема Гольфстрима. Показано отклонение вправо как глубинных холодных вод, текущих на юг от Гренландии (синяя линия), так и теплое поверхностное течение в сторону Европы (красная линия)

разделяется на Азорское и Северо-Атлантическое течения; последнее, собственно, и приносит теплые воды к берегам Европы. И ...

Но нам достаточно того, что это интересное явление дало повод поговорить о некоторых аспектах физики.

## Кулинарные исследования

**Е. СОКОЛОВ**

**Н**АЧИНАТЬ КУЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ПРЕДОБЕДЕННОЕ время – пропавшее дело. Не успел я написать на доске тему занятия, как за моей спиной уже разгорелся спор.

– Наверное, сегодня на обед суп будет, с самого утра из столовой вкусно пахнет.

– Да нет, это котлетами пахнет, суп так долго не варят. Моя бабушка готовит суп всего за полчаса.

– За полчаса суп не пригостишь.

– Пригостишь, если использовать кастрюлю-скороварку.

– Что это за чудо-кастрюля такая? Может быть, это машина времени?!

Все было ясно. Слушатели нашего физического кружка снова не успели пообедать, и поэтому их мысли из области теоретической кулинарии перешли в область практическую. Пора отпускать их домой.

– Итак, – вмешался я в разговор, – тема следующего занятия найдена: «Что это за чудо-кастрюля – кастрюля-скороварка?» А чтобы наш будущий разговор был содержательным, вот вам задача на эту тему.

### Задача про кастрюлю-скороварку

*Кастрюля-скороварка позволяет поварам Санкт-Петербурга в четыре раза сократить время приготовления мяса: в обычной кастрюле мясо готовится 2 часа, а в кастрюле-скороварке – всего 1/2 часа. Во сколько раз использование этой чудо-кастрюли позволит сократить время приго-*

*товления мяса поварам высокогорного Тибета, где атмосферное давление составляет всего 1/2 атмосферы? Известно, что при повышении температуры приготовления на 10 °С скорость соответствующих химических реакций увеличивается в два раза (т.е. время приготовления сокращается в два раза). Для расчета воспользуйтесь экспериментальным графиком зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры (рис.1).*

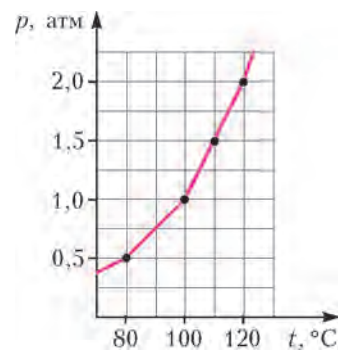


Рис.1. Как меняется давление насыщенного водяного пара в зависимости от температуры

### Что есть процесс приготовления пищи?

Пока наши школьники обедают, давайте попробуем сами разобраться, в чем секрет кастрюли-скороварки. Ведь это факт, что в ней все быстрее готовится. Вопрос – почему?

На рисунке 2 изображена схема устройства кастрюли-скороварки. Как видно, она отличается от обычной кастрюли только тем, что снабжена плотно закрывающейся крышкой.

– Ну, тогда все ясно, – может кто-то поторопиться с ответом, – под крышкой в кастрюле-скороварке давление больше атмосферного, и поэтому там все быстрее готовится.

– Подождите, – ответим мы. – Конечно, давление в кастрюле-скороварке больше атмосферного. Конструкторы учитывают этот факт и устанавливают в ее крышке клапан-предохранитель. Когда давление под крышкой превышает атмосферное давление на некоторую заданную величину, грузик приподнимается, клапан открывается, и часть воздуха и водяного пара выбрасывается в атмосферу. Но само по себе давление не увеличивает быстроту приготовления пищи



Рис.2. а) Обычная кастрюля и кастрюля-скороварка; б) устройство кастрюли-скороварки: 1 – корпус, 2 – крышка с затягивающим винтом, 3 – клапан-предохранитель

– как бы вы ни давили на телячью отбивную, она от этого не сварится. Надо искать что-то другое.

Обратимся за помощью к химии и спросим ее, в чем заключается процесс приготовления пищи и от чего зависит его скорость. Ответ такой.

Процесс приготовления пищи – это химическая реакция, которая заключается в разрыве некоторых химических связей в молекулах белка. Это первое. А второе – скорость химических реакций чрезвычайно сильно зависит от температуры. Для процесса приготовления пищи, а также для очень многих других процессов органической химии этот закон таков: при повышении температуры на  $10^\circ\text{C}$  скорость реакции увеличивается в  $k$  раз, где  $k$  – некоторое постоянное для данной реакции число. Такая зависимость называется геометрической прогрессией. В школьных учебниках физики она не часто упоминается. Но будьте готовы к тому, что если геометрическая прогрессия встретится нам в жизни, то что-нибудь точно случится. Например, очень быстро скиснет забытый на плите борщ или кто-то некстати заболит, съев четыре порции холодного мороженого.

#### Упражнения

1. Вычислите, во сколько раз быстрее скиснет борщ, забытый в жару на кухне ( $35^\circ\text{C}$ ), чем это произошло бы в холодильнике ( $5^\circ\text{C}$ ). Считайте, что для химических реакций, приводящих к скисанию борща, справедливо то же правило, что и для процесса приготовления пищи ( $k = 2$ ).

2. Почему мы очень часто заболеваем после того, как промерзнем? Почему во время болезни температура организма увеличивается? В чем смысл такого механизма защиты, предусмотренного для нас природой?

Итак, какова же температура в кастрюле-скороварке, о которой идет речь в нашей задаче, при условии, что  $k = 2$ ? Если время приготовления в кастрюле-скороварке уменьшится в 4 раза, с 2 часов до  $1/2$  часа, то температура в ней на  $20^\circ\text{C}$  выше, чем в обычной открытой кастрюле, и составляет  $120^\circ\text{C}$ . Мы раскрыли главный секрет кастрюли-скороварки – в ней все быстрее готовится потому, что температура кипящей воды в ней выше, чем в обычной кастрюле.

#### Что есть кипение?

– Это надо же, температура всего на  $20^\circ\text{C}$  больше – и такой эффект. А что мешает нам увеличить температуру воды в обычной кастрюле? Давайте, например, дадим побольше газа.

– Нет, ничего из этого не получится. Да, выкипать вода будет быстрее, а вот температура ее расти не будет. И причина этому – кипение. Когда вода кипит, все получаемое ею тепло идет на парообразование, кипящая вода не нагревается.

#### Упражнения

3. Неопытная хозяйка жалуется подружке: «Целый час ждала, пока потушится говядина. Под конец отошла всего на минутку, и все подгорело!» Что же произошло в ту минутку, когда хозяйка отлучилась?

4. Ровно в  $12^{00}$  Матвей вышел из дома, чтобы отнести Лизе учебник по физике. На половине дороги он вспомнил, что забыл выключить чайник, который поставил в  $11^{50}$ . Успеет ли Матвей дойти до Лизы и вернуться домой до тех пор, пока чайник не сторит, или ему нужно не откладывая поворачивать назад? От дома Матвея до дома Лизы 20 минут ходу, поставленный на плиту чайник закипает через 15 минут, начальная температура воды в чайнике  $20^\circ\text{C}$ . Все остальные данные возьмите из справочника.

– Итак, нагреть воду мы можем лишь до температуры кипения. Поэтому скорость приготовления пищи зависит лишь от температуры кипения. А разве температура кипения воды не константа? Разве это не закон природы, что вода всегда закипает при температуре  $100^\circ\text{C}$ ?

– Запомним раз и навсегда – нет такого закона. Конечно, обычный чайник на обычной кухне, когда давление равно одной атмосфере, закипает при температуре  $100^\circ\text{C}$ , но может закипеть и холодная вода, а может, наоборот, не кипеть вода, нагретая до  $300^\circ\text{C}$ . Чтобы понять, от чего зависит температура кипения, нам надо разобраться с тем, что есть кипение. Оставим для экзамена стандартную фразу о том, что кипение – это процесс парообразования, идущий в объеме жидкости, и поищем что-нибудь более емкое. Кстати, а как бы вы объяснили слова «вода кипит» марсианину, который никогда не видел ни воды, ни кипения?

– Я думаю, нам пришлось бы сказать, что при некоторых условиях в жидкостях самопроизвольно начинают образовываться громадные пузыри. Эти пузыри растут, архимедова сила отрывает их от стенок, они всплывают, производя бурление и характерный шум. В этом и состоит процесс кипения. И, конечно, узнав это, марсианин нас спросит: «Откуда берутся в жидкости эти пузырьки? Что у них внутри? Почему эти пузырьки становятся громадными?» Это правильные вопросы. Давайте ответим на них.

Откуда берутся в кипящем чайнике пузырьки? Они там есть, только при обычных условиях они очень маленькие, поэтому мы их не замечаем.

Что у них внутри? Немного воздуха и, конечно, насыщенный водяной пар.

А вот для того чтобы объяснить, почему при нагревании эти почти невидимые сначала микропузырьки превращаются в громадные пузыри, нам следует всмотреться в их жизнь более пристально. И поможет нам очень простое утверждение (условие равновесия пузырька): сумма давления воздуха и давления насыщенных паров, находящихся внутри пузырька, всегда остается равной атмосферному давлению:

$$P_{\text{возд}} + P_{\text{нас}} = P_{\text{атм}}.$$

Уяснив это, проследим, что происходит с каждым из слагаемых при нагревании чайника.

– Атмосферное давление, конечно, ...

– Остается постоянным.

– Правильно. Давление насыщенного водяного пара, согласно рисунку 1, при нагревании катастрофически растёт. А что остается на долю воздуха?

– Его давление должно упасть.

– А это означает, что пузырек должен расшириться.

Иными словами, мы доказали, что пузырек увеличивает свой объем с ростом температуры воды в чайнике.

Но это еще не главное. Главное состоит в ответе на следующий вопрос: «Каким должен стать размер пузырька, когда вода нагреется до температуры, при которой давление насыщенного водяного пара станет равным атмосферному давлению?»

– Тогда давление воздуха должно упасть до нуля. А это значит, что объем пузырька должен стать равным ...



– Если вы боитесь произнести правильный ответ, то давайте поможем себе формулой. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха в пузырьке и найдем из него объем:

$$p_{\text{возд}} V_{\text{пуз}} = \frac{m_{\text{возд}}}{M_{\text{возд}}} RT \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{\text{пуз}} = \frac{m_{\text{возд}}}{M_{\text{возд}}} \frac{RT}{p_{\text{возд}}} = \frac{m_{\text{возд}}}{M_{\text{возд}}} \frac{RT}{(p_{\text{атм}} - p_{\text{нас}})}$$

– Стойте, если давление насыщенного водяного пара станет равным атмосферному, то в знаменателе появится ноль. А на ноль делить нельзя!

– Да, на ноль делить нельзя, но иногда сама природа делит на ноль. И тогда в ответе получается бесконечность. А для нашего малюсенького пузырька это означает, что он увеличится не в два и не в сто раз, а станет одним из тех громадных пузырей, которые мы видим в бурлящей кипящей жидкости.

Итак, кипение – это великий момент в личной жизни каждого пузырька. Он становится равным Вселенной! А мы можем сформулировать условие кипения:

*Жидкость закипает, когда давление насыщенного водяного пара становится равным внешнему давлению. Чем выше внешнее давление, тем выше температура кипения.*

Однако вернемся к нашей задаче. Используя график зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры (см. рис.1), видим, что вода в Тибете закипит при  $80^\circ\text{C}$ . При уменьшении температуры кипения на  $20^\circ\text{C}$  время приготовления увеличится вчетверо и составит 8 часов. Правильно утверждают путешественники: сварить мясо в Тибете практически невозможно!

Итак, мы уже наполовину решили нашу задачу. Но мы точно знаем, что есть ребята, которые считают наш рассказ о жизни пузырьков не то чтобы неправильным, но каким-то неубедительным. Поэтому, давайте сделаем небольшую остановку и в подтверждение нашего рассказа приведем три правдивые истории из жизни.

**Неопытный стажер.** В одной научной лаборатории работали настоящие любители и ценители чая. Они не только брали для его приготовления отстоявшуюся родниковую воду, но и кипятили ее в специальной колбе, сделанной из кварцевого стекла (рис.3,а).

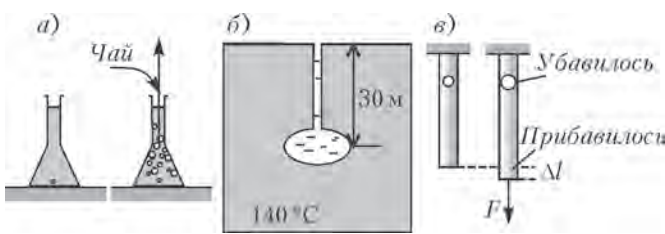


Рис.3. Пузырьки в колбе, гейзере и металлическом стержне

Однажды приготовление чая поручили молодому стажеру. Он поставил колбу на плиту и стал ждать. Вода очень долго не закипала. Наконец, появилось несколько пузырьков. Стажер решил больше не ждать... Но молодой человек не знал одной особенности кварцевого стекла. Химическая посуда специально изготавливается из этого материала, потому что на ее поверхности нет тех микроскопических пузырьков воздуха, о которых мы говорили. А если пузырьков нет, то и расти нечему. И жидкость не закипает, даже если температура станет больше чем  $100^\circ\text{C}$ . Как потом выяснилось, в колбе была перегретая вода – вода, нагретая до  $104^\circ\text{C}$ . Когда стажер стал сыпать заварку в колбу (а в заварке помимо чаинков есть много пузырьков воздуха),

жидкость мгновенно вскипела (пузырьки быстро выросли). В результате чай, вода и пузырьки – все это вместе вылетело столбом в потолок.

**Упражнение 5.** Что происходит в тот момент, когда хозяйка солил кипящий борщ? Понаблюдайте это явление и дайте объяснение.

**Рассказ о гейзере.** Гейзеры – это фонтаны горячей воды, периодически бьющие из-под земли. Они существуют там, где есть вода и вулканическое тепло. Устроен гейзер просто – это подземный резервуар, соединенный каналом с поверхностью земли. Канал может быть достаточно длинным. Например, в гейзере «Часовой» на Камчатке его глубина составляет 30 метров (рис.3,б).

Гейзер работает так. Пещера и канал заполняются подземными водами. После этого вода начинает нагреваться подземным теплом. Когда она нагревается до  $100^\circ\text{C}$ , она еще не закипает. Не потому, что там нет пузырьков (здесь как раз пузырьков достаточно), а потому, что давление на такой глубине равно 4 атм. А при таком давлении вода закипает при температуре, равной  $140^\circ\text{C}$ . Вот до этой температуры и будет нагреваться вода в гейзере. С момента закипания воды начинается самое главное. Появляющиеся пузырьки воздуха устремляются по каналу вверх, увлекая за собой воду. Вода из канала выливается на поверхность, и давление в пещере становится равным атмосферному. Жидкость, перегретая до  $140^\circ\text{C}$ , мгновенно вскипает. Фонтан воды и пара устремляется вверх.

**Рассказ о прочности.** Вы знаете, что если увеличивать растягивающую силу, то любое тело, в конце концов, обязательно разорвется? А происходит это потому, что в каждом теле есть малюсенькие «пузырьки» – дефекты и может случиться так, что они, как и воздушные пузырьки в воде, предпочтут спокойной жизни безудержное расширение.

Для пояснения рассмотрим металлический стержень (рис.3,в) с маленьким пузырьком радиусом  $r_0$  внутри, к которому подвешен груз, т.е. приложена сила  $F = mg$ . Как и любая другая механическая система, наш стержень стремится уменьшить свою потенциальную энергию. В этом все всегда единодушны. Споры возникают тогда, когда возможны два пути, ведущие к цели, и поэтому приходится выбирать.

Так, кто-то может сказать: «Пузырек должен расширяться. При этом стержень удлинится на  $\Delta l = \Delta V/S_{\text{стерж}}$  (здесь  $S_{\text{стерж}}$  – площадь поперечного сечения стержня), груз опустится и его потенциальная энергия изменится на величину  $\Delta E_1 = -mg\Delta l = -F\Delta V/S_{\text{стерж}}$ ».

Другой может ему возразить: «Пузырек должен сжаться. При сжатии уменьшается площадь его поверхности, а с ней и потенциальная энергия поверхностного натяжения на величину  $\Delta E_2 = \sigma\Delta S$  (здесь  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения)».

Мы примирим спорщиков. Конечно, пузырек учтет и первое мнение, и второе и выберет тот путь, который приведет к уменьшению его *полной* энергии на величину

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = -\frac{F\Delta V}{S_{\text{стерж}}} + \sigma\Delta S = \\ = -\frac{F \cdot 4\pi r_0^2 \Delta r}{S_{\text{стерж}}} + \sigma \cdot 8\pi r_0 \Delta r = 4\pi r_0 \left( -\frac{F}{S_{\text{стерж}}} r_0 + 2\sigma \right) \Delta r$$

На рисунке 4 мы изобразили зависимость коэффициента, стоящего перед  $\Delta r$ , от начального размера пузырька  $r_0$ . Для маленьких пузырьков, радиус которых меньше критического радиуса  $r_{\text{кр}} = 2\sigma S_{\text{стерж}}/F$ , он положительный, и такие пузырьки не растут – стержень остается целым. Беда в том, что с увеличением приложенной силы, изменяется и наша

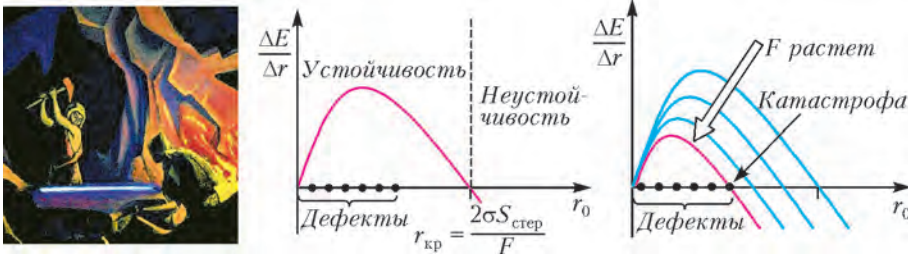


Рис. 4. Для того чтобы сделать металл крепче, древние кузнецы очень долго ковали его – при такой обработке в металле уменьшалось количество дефектов-пузырьков

кривая – критический радиус становится все меньше и меньше и в конце концов оказывается равным радиусу дефекта.

– А что если внутри стержня не будет дефектов-пузырьков?

– Тогда будет то же, что с кипением, – нечему будет расти, и образец будет обладать уникальной прочностью. Именно такими материалами являются, например, углеродные нанотрубки.

Однако, время. Наши докладчики уже готовы предоставить нам свое решение задачи.

**Как «кристаллизуются» задачи**

Быть докладчиком вызвался наш самый смелый слушатель – Сережа Р.

– В своем решении мы хотим не только получить ответ, но и показать, как в процессе решения происходит «кристаллизация» материала задачи в одно целое – в логический комплекс, – вот так интригуяще он начал свое выступление.

– Первоначально в нашей задаче царит «первородный хаос» (рис.5,а). Четыре числа, заданные в условии задачи, и четыре кастрюли (две открытые кастрюли в Санкт-Петербурге и Тибете и две кастрюли-скороварки также в Санкт-Петербурге и Тибете) существуют независимо и раздельно друг от друга. И первое, что нужно сделать, это соединить их воедино.

С каждой кастрюлей связаны три величины: давление в кастрюле  $p$ , температура кипящей воды  $t_{кип}$  и время приготовления  $\tau$ . Поэтому прикрепляем заданные числа к соот-

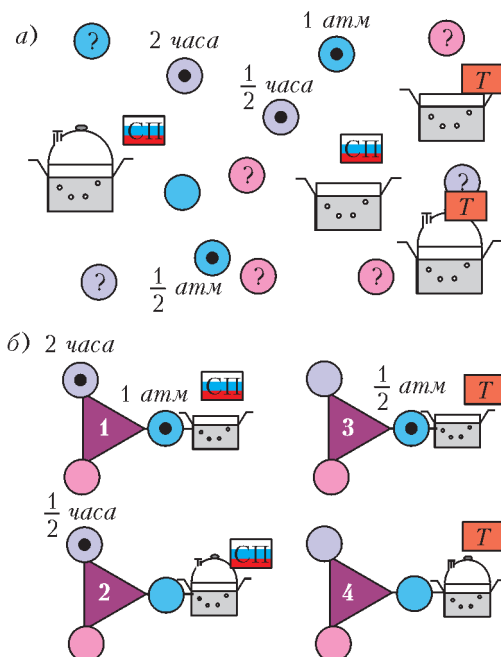


Рис. 5. «Первородный хаос» (а) и «внутренний порядок» (б)

ветствующим кастрюлям и готовим места для тех значений давлений, температур и времен, которых пока у нас нет, но которые могут появиться (рис.5,б). И, наверное, теперь лучше называть образовавшиеся комплексы не кастрюлями, а ситуациями. Например, первый комплекс – это ситуация, в которой обед готовится в открытой кастрюле в Санкт-Петербурге.

– Итак, все внутреннее содержание задачи мы исчерпали. Теперь мы должны выйти наружу. Нашей внешней структурой будет комплекс трех осей: давления  $p$ , температуры кипения  $t_{кип}$  и времени приготовления  $\tau$  (рис.6). Мы говорим, что эти три оси являются единым комплексом, потому что значения на этих осях связаны друг с другом условиями кипения и законом приготовления пищи.

Как только мы прикрепим к этой структуре ситуацию «открытая кастрюля в Санкт-Петербурге», все числа на осях будут расставлены.

– То, что мы построили, можно назвать логической схемой физической ситуации «приготовление мясного блюда». Теперь, прикрепив к любой ее точке ситуацию, для которой известен один параметр, мы прочтем с помощью нашей структуры значения всех остальных параметров. Например, для «открытой кастрюли в Тибете» ( $p = 0,5$  атм) получаем  $t_{кип} = 80^\circ\text{C}$  и  $\tau = 8$  часов. А прикрепление ситуации «кастрюля-скороварка в Санкт-Петербурге» ( $\tau = 1/2$  часа) дает нам, что температура приготовления в этом случае будет  $t_{кип} = 120^\circ\text{C}$  и давление внутри кастрюли –  $p = 2$  атм.

– Ну, а теперь главный вопрос: «А к какой точке нашей логической схемы нам надо присоединить последнюю оставшуюся ситуацию «кастрюля-скороварка в Тибете?» Устройство клапана кастрюли-скороварки таково, что он всегда поддерживает одну и ту же разность давлений внутри и снаружи кастрюли (получите сами это утверждение из условия равновесия груза). А это означает, что если в Санкт-Петербурге давление в кастрюле на одну атмосферу больше, чем снаружи, то и в Тибете оно будет на одну атмосферу больше, т.е. будет составлять 1,5 атмосферы. Теперь все становится на свое место, и мы читаем ответ с рисунка 7 – температура в кастрюле-скороварке в Тибете будет  $110^\circ\text{C}$ , а время приготовления мясного блюда займет всего 1 час.

Итак, наш ответ готов. Кастрюля-скороварка позволяет сократить время приготовления в Тибете в восемь раз!

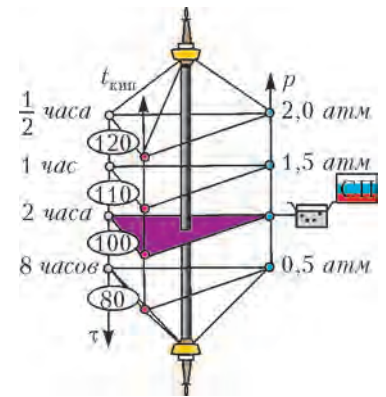


Рис. 6. Полностью сформированный комплекс

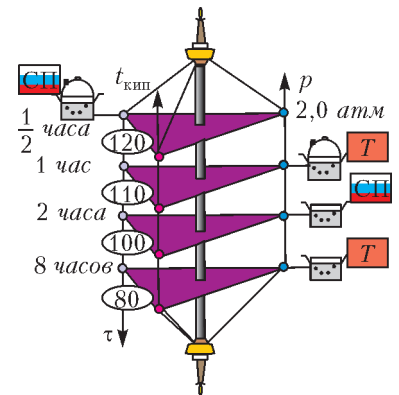


Рис. 7. Окончательное решение задачи

# Поверхностное натяжение, капля и Вселенная

А. СТАСЕНКО

ОДНАЖДЫ НЕКИЙ ЗДРАВОВОМЫСЛЯЩИЙ ОТЛИЧНИК ЗАМЕТИЛ, что размерность коэффициента поверхностного натяжения  $[\sigma] = \text{Н/м} \equiv \text{Дж/м}^2$  имеет два аспекта: силовой и энергетический. Прежде всего, он решил построить темпера-

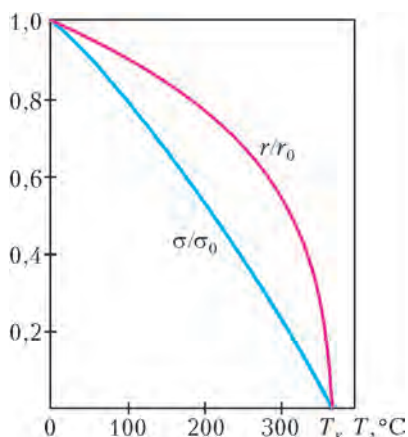


Рис. 1. Температурные зависимости удельной теплоты парообразования и коэффициента поверхностного натяжения воды при фазовом равновесии, отнесенные к своим значениям при нормальных условиях ( $r_0 = 2,5 \text{ МДж/кг}$ ,  $\sigma_0 = 78 \text{ мДж/м}^2$ )

«В этом что-то есть», – подумал здравомыслящий Отличник и обратился к определениям. Удельная теплота парообразования  $r$  ( $[r] = \text{Дж/кг}$ ) – это энергия, которую нужно затратить, чтобы обратит в пар единицу массы (например, один килограмм) воды, т.е. по крайней мере разорвать все связи между ее молекулами. А коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  ( $[\sigma] = \text{Дж/м}^2 \equiv \text{Н/м}$ ) – это работа, которую надо совершить, чтобы увеличить площадь поверхности на единицу (например, один квадратный метр) без изменения объема жидкости.

Всем известно, что в невесомости капля под действием этого поверхностного натяжения принимает строго шаровую форму, да и в обычных условиях можно наблюдать, как при касательном соударении с плоской поверхностью воды капля несколько раз подпрыгивает, прежде чем сольется со своей стихией. Очевидно, что поверхностное натяжение бережет каплю от разрушения. А вот подводимое тепло разрушает ее. Значит, между ними должна быть определенная связь, на которую намекают и кривые на рисунке 1.

И тут Отличник сделал следующий шаг: стал строить различные модели, помня, что модели – еще не теории, но очень полезны для описания сути явлений и для численных оценок масштабов величин.

Для начала рассмотрим совсем примитивную модель по-

верхностного слоя шаровой капли радиусом  $a$ , состоящего из молекул-шариков (рис. 2). Его объем равен приблизительно  $4\pi a^2 \cdot 2r_m$ , где  $r_m$  – радиус молекулы. Следовательно, их количество в слое приблизительно равно

$$N \approx \frac{4\pi a^2 \cdot 2r_m}{(4/3)\pi r_m^3} = 6 \left( \frac{a}{r_m} \right)^2, \quad (1)$$

где в знаменателе записан объем одной молекулы-шарика. Да и плотность жидкости можно связать с этим объемом:

$$\rho_{\text{ж}} \approx \frac{m_1}{(4/3)\pi r_m^3}, \quad (2)$$

где  $m_1$  – масса одной молекулы. А поскольку коэффициент поверхностного натяжения имеет смысл поверхностной плотности энергии, то можно записать

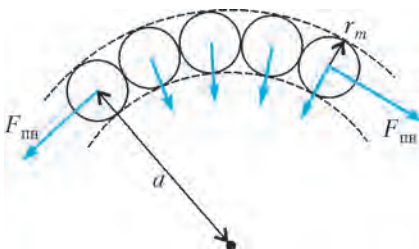


Рис. 2. Модель тонкого поверхностного слоя капли, определяющего поверхностное натяжение. Условно изображено притяжение молекул выделенного участка поверхностного слоя всеми внутренними молекулами (радиальные стрелки) и их касательные к поверхности равнодействующие сил поверхностного натяжения

$$4\pi a^2 \sigma \approx E_1 N,$$

где  $E_1$  – энергия связи, приходящаяся на одну молекулу.

Далее. Вполне понятно, что для превращения жидкости в пар нужно не только разорвать межмолекулярные связи, но и совершить работу по увеличению объема единицы массы вещества от  $V_{\text{ж}} = \frac{1}{\rho_{\text{ж}}}$  до  $V_{\text{п}} = \frac{1}{\rho_{\text{п}}}$ , т.е. на

$$\Delta V = V_{\text{п}} - V_{\text{ж}} = \frac{1}{\rho_{\text{п}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Значит, на долю связей молекул в единице массы приходится энергия  $r - p\Delta V$ , а на каждую молекулу –

$$E_1 = m_1 \left[ r - \frac{p}{\rho_{\text{п}}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}} \right) \right].$$

Из этих соотношений следует

$$\sigma \approx \frac{E_1 N}{4\pi a^2} \approx 2 \left( \frac{3}{4\pi} \frac{M}{N_A} \right)^{1/3} \rho_{\text{ж}}^{2/3} \left[ r - \frac{p}{\rho_{\text{п}}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}} \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь  $M$  – молярная масса,  $N_A$  – число Авогадро. Результат оказался независящим от радиуса капли, что вполне разумно. Заметим, что в последнем соотношении давление  $p$  не обязательно соответствует идеальному газу (пару), описываемому уравнением состояния Менделеева – Клапейрона

$$p = \rho_{\text{п}} \frac{R}{M} T, \text{ или } \frac{p}{\rho_{\text{п}}} = \frac{RT}{M}. \quad (4)$$

Но если принять последнее (что мы и сделаем), то в выражении  $\left( 1 - \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}} \right)$  логично пренебречь вторым слагаемым.

Конечно, полученное соотношение приближенное: ведь мы при выводе формулы (1) не учитывали плотность упаковки молекул в пограничном слое, а в формуле (2) использовали среднюю плотность воды  $\rho_{\text{ж}}$ . Поэтому для дальнейших уточнений можно ввести коэффициент  $\xi$ , опираясь на известные значения  $r$  и  $\sigma$  при некоторой температуре. Например, при  $0^\circ \text{C}$   $r = 2,5 \text{ МДж/кг}$ ,  $\sigma = 78 \text{ мДж/м}^2$  (да не забудем,



что приставка М означает «мега», а м – «милли», так что соответствующие единицы измерения отличаются во много раз). Используя выражения (4) и (3), получим

$$0,078 = \xi \cdot 2 \left( \frac{3}{4\pi} \frac{0,018}{6 \cdot 10^{23}} \right)^{1/3} (10^3)^{2/3} \left[ 2,5 \cdot 10^6 - \frac{8,31 \cdot 273}{0,018} \right] = \xi \cdot 0,91.$$

Кстати, здесь видно, что работа по расширению пара (второе слагаемое в квадратных скобках) в 20 раз меньше теплоты парообразования. Выбирая, например,  $\xi = \frac{1}{4\pi}$ , получим неплохое согласование правой и левой частей. Впрочем, желающий да уточнит этот коэффициент.

Конечно, это не открытие (а если открытие, то его, наверное, не раз делали другие здравомыслящие Отличники), но весьма полезная связь между величинами. Ибо, случайно оказавшись в лесу и забыв  $r$  воды, вы теперь можете оценить его, если помните значение  $\sigma$ . И наоборот. Кроме того, можно использовать эту связь и в случае других веществ, экономя при этом экспериментальные усилия.

Но действительно ли это натяжение «поверхностное»? Методами молекулярной механики и квантовой химии (есть

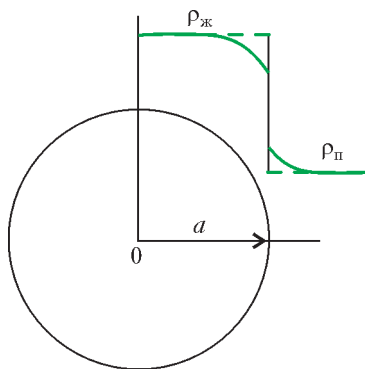


Рис.3. Радиальное распределение плотности воды и пара: штриховая линия – модель бесконечно тонкого слоя; сплошная линия – более реальное «разрыхление» жидкости и более густой пар у поверхности капли

такие разделы науки, это не очень страшно) установлено следующее. Оказывается, у границы жидкость-пар распределение плотности не описывается резкой ступенькой (рис.3, штриховые прямые линии). При перемещении из жидкой фазы в газообразную плотность вещества убывает постепенно, плавно переходя от плотности жидкости к плотности насыщенного пара при данной температуре. Характерная толщина этих переходных слоев, конечно же, связана с радиусом межмолекулярного взаимодействия и глубиной потенциальной ямы, из которой нужно «вытащить вверх» молекулы при испарении капли (т.е. опять-таки с теплотой парообразования). Значит, поверхностное натяжение есть некий полезный физический образ внешней упругой пленки, ограничивающей каплю и берегущей ее от развала, а на самом деле являющейся результатом взаимодействия всех молекул капли, т.е. объемным явлением.

Кстати, почему же, несмотря на «рыхлую» поверхность, внешний мир отражается «как в капле воды»? Дело в том, что толщина этого поверхностного слоя составляет всего несколько диаметров молекул, т.е. измеряется в нанометрах ( $10^{-9}$  м). Между тем, длина волны видимого спектра около микрометра ( $10^{-6}$  м), т.е. на порядки больше, так что эта молекулярная шероховатость не устраняет зеркальных свойств макрокапли.

В чем же полезность понятия «поверхностного натяжения»? Ой, можно назвать тысячу причин. Начать хотя бы с того, что даже в ядерной физике используется «капельная модель» ядра. Но для начала – более простой пример.

А что если, например, понадобилось узнать частоту  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  колебаний капли дождя, возникших вслед-

ствие касательного столкновения с другой каплей (как мы знаем, при этом не обязательно произойдет их слияние)? Известно, что для возникновения колебаний необходимы два конкурирующих фактора: возвращающая сила, стремящаяся восстановить равновесие (в случае капли – шаровую форму), и инертность, приводящая к «проскакиванию» этого состояния. Ясно, что в рассматриваемом случае эти конкурирующие факторы характеризуются величинами  $\sigma$  и  $m$ . Из соображений размерности можно написать

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{m}}. \quad (5)$$

Действительно,

$$\left( \frac{\text{Н}}{\text{м}} \frac{1}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \frac{1}{\text{кг}} = \frac{1}{\text{с}^2} \right)^{1/2} = \text{с}^{-1}.$$

Например, для капли воды радиусом  $b = 1$  мм получим

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{(4/3)\pi b^3 \rho_w}} \sim \sqrt{\frac{0,078}{4(10^{-3})^3 \cdot 10^3}} \text{с}^{-1} \sim 10^2 \text{с}^{-1}.$$

Еще пример. Земля, в которую попал большой метеорит, – чем не капля, если приписать всю энергию гравитационно-взаимодействия ее частей ее же поверхностной энергии:

$$G \frac{m_3^2}{R_3} \sim 4\pi R_3^2 \sigma ?$$

Здесь  $R_3$  и  $m_3 = \frac{4}{3}\pi R_3^3 \langle \rho \rangle$  – радиус и масса Земли-капли,  $\langle \rho \rangle$  – ее средняя плотность, а  $G$  – постоянная тяготения. Определив отсюда  $\sigma$  и подставив в формулу (5), получим

$$\omega \sim \sqrt{\frac{G \langle \rho \rangle}{3}}.$$

Принимая  $\langle \rho \rangle = 5500 \text{ кг/м}^3$ , найдем период колебаний формы Земли, возбужденных ударами большого метеорита:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 2\pi \sqrt{\frac{3}{G \langle \rho \rangle}} \sim 2\pi \sqrt{\frac{3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,5 \cdot 10^3}} \text{с} \approx 10^4 \text{с}.$$

Конечно, все это не точные численные значения, а масштабы рассматриваемых явлений. Но что мы видим? Период колебаний оказался зависящим только от средней плотности гравитирующих масс. В таком случае – почему бы не рассмотреть всю Вселенную?! Если принять ее плотность равной  $5 \cdot 10^{-27} \text{ кг/м}^3$  (критическое значение, разделяющее колебательный и монотонный характер ее динамики), получим некий масштаб времени:

$$T \sim 2\pi \sqrt{\frac{3}{G \langle \rho \rangle}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{-27}}} \text{с} \sim 10^{12} \text{лет} = 1000 \text{млрд.лет}$$

(один год составляет приблизительно  $3 \cdot 10^7$  с). Поскольку мы претендуем лишь на оценки, следует сказать, что полученное значение порядка тысячи миллиардов лет. Современное значение возраста Вселенной (времени, прошедшего с момента Большого взрыва) это 13,7 млрд. лет. Впрочем, новые данные о «темной материи» и «темной энергии» говорят в пользу монотонного расширения Вселенной. Какой из сценариев реализуется – похожа ли Вселенная на пульсирующую каплю или на гидрофобный порошок, разбегающийся по поверхности воды, – покажет время.

«Надо немного подождать», – подумал здравомыслящий Отличник и отправился готовиться к ЕГЭ.

# Угол смачивания и энергия взаимодействия молекул

**С.ВАРЛАМОВ**

КАКИХ ТОЛЬКО ФОТОГРАФИЙ КАПЕЛЬ ЖИДКОСТИ НА плоской поверхности вы не найдете в интернете! Если искать целенаправленно, то можно найти капли и на горизонтальной, и на вертикальной поверхности (рис.1). Чем меньше по размеру капли, тем их форма ближе к сферической. Это связано с тем, что при малых размерах капля потенциальная энергия капли в поле тяжести играет малую роль в сравнении с энергией, связанной с поверхностными явлениями. Минимальность суммарной потенциальной энергии определяет форму капли и, в частности, так называемый угол смачивания, который образуют друг с другом плоская поверхность твердого тела, на которой лежит капля, и поверхность, касательная к свободной поверхности капли вблизи периметра пятна контакта.

Пусть капля жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  имеет объем  $V$  и эта капля пришла в соприкосновение с плоской твердой поверхностью и прилипла к ней. Уменьшение суммарной потенциальной энергии  $\Delta U$  пропорционально площади контакта жидкости с твердым телом  $S$ . Обозначим отношение  $\Delta U/S$  через  $\delta$ . Имеется в виду, что



Рис. 1

в сравнении с энергией, которой обладают молекулы на плоской свободной поверхности жидкости, молекулы, контактирующие с твердым телом, имеют меньшую потенциальную энергию, т.е. находятся в более глубокой потенциальной яме. Эта яма может быть больше или меньше соответствующей глубины потенциальной ямы, в которой находится каждая молекула жидкости, окруженная со всех сторон соседками одного с нею сорта.

Найдем условие, при котором потенциальная энергия, связанная с поверхностными явлениями, будет минимальной. Будем считать, что размеры капли достаточно велики, так что радиус кривизны свободной поверхности жидкости значительно больше размеров молекул жидкости.

Сначала рассмотрим случай, когда гравитация не играет роли (такой эксперимент могут провести на борту международной космической станции – МКС – космонавты), поэтому форма капли осесимметрична. Поверхность капли, не контактирующая с твердым телом, имеет форму части сферы, а пятно контакта имеет форму круга. Пусть радиус кривизны сферы равен  $r$ , а угол, который составляют поверхности жидкости и твердого тела в месте контакта, равен  $\phi$  (рис. 2). Этот угол отсчитывается так, чтобы жидкость находилась внутри него. С помощью геометрии несложно найти, что объем капли жидкости такой формы равен

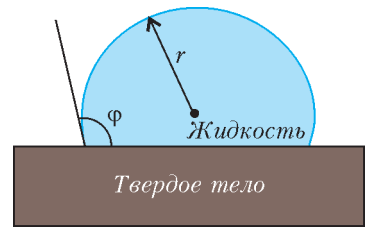


Рис. 2

$$V = \frac{\pi r^3}{3} (2 - 3 \cos \phi + \cos^3 \phi).$$

Можно сказать, что параметры  $r$  и  $\phi$  не являются независимыми и между ними имеется связь:

$$r = \left( \frac{3V}{\pi} \right)^{1/3} (2 - 3 \cos \phi + \cos^3 \phi)^{-1/3}.$$

Поверхностная энергия жидкости складывается из двух слагаемых. Первое слагаемое – это энергия молекул, живущих на свободной части сферической поверхности площадью  $S_1 = 2\pi r^2 (1 - \cos \phi)$ , она равна  $\sigma S_1$ . Второе слагаемое связано с молекулами, живущими на поверхности контакта с твердой поверхностью площадью  $S_2 = \pi r^2 \sin^2 \phi$  и для которых дополнительную глубину потенциальной ямы образуют молекулы твердого тела. Эта энергия равна  $(\sigma - \delta) S_2$ . Нужно найти минимум функции

$$U = \sigma S_1 + (\sigma - \delta) S_2 = \sigma \pi r^2 \left( 2 - 2 \cos \phi + (1 - \cos^2 \phi) \frac{\sigma - \delta}{\sigma} \right) = \sigma \pi \left( \frac{3V}{\pi} \right)^{2/3} (2 - 3 \cos \phi + \cos^3 \phi)^{-2/3} \left( 2 - 2 \cos \phi + (1 - \cos^2 \phi) \frac{\sigma - \delta}{\sigma} \right).$$

Как видно, в выражении для  $U$  есть безразмерный параметр  $\delta/\sigma$ , от величины которого зависит угол  $\phi$ , соответствующий минимуму потенциальной энергии системы вода–плоская поверхность твердого тела. Естественно, задачу по определению минимума можно решить аналитически, взяв от функции  $U$  производную по переменной  $\cos \phi$  и найдя значение этого косинуса, при котором производная обращается в ноль. По-видимому, для школьников это достаточно сложно. Но можно использовать компьютер – численное решение задачи с помощью программы Excel приводит к линейной зависимости  $\cos \phi$  от параметра  $\delta/\sigma$ . А именно:

$$\cos \phi = -1 + \frac{\delta}{\sigma}.$$



(Кстати, найденное значение косинуса угла с помощью производной дает в точности такое же значение.)

На рисунке 3 параметр  $\delta/\sigma$  меняется (по горизонтали) от 0 до 2 с шагом 0,05. Соответственно,  $\cos \varphi$  меняется от  $-1$  до  $+1$  по вертикали с таким же шагом 0,05. Заливкой в каждой

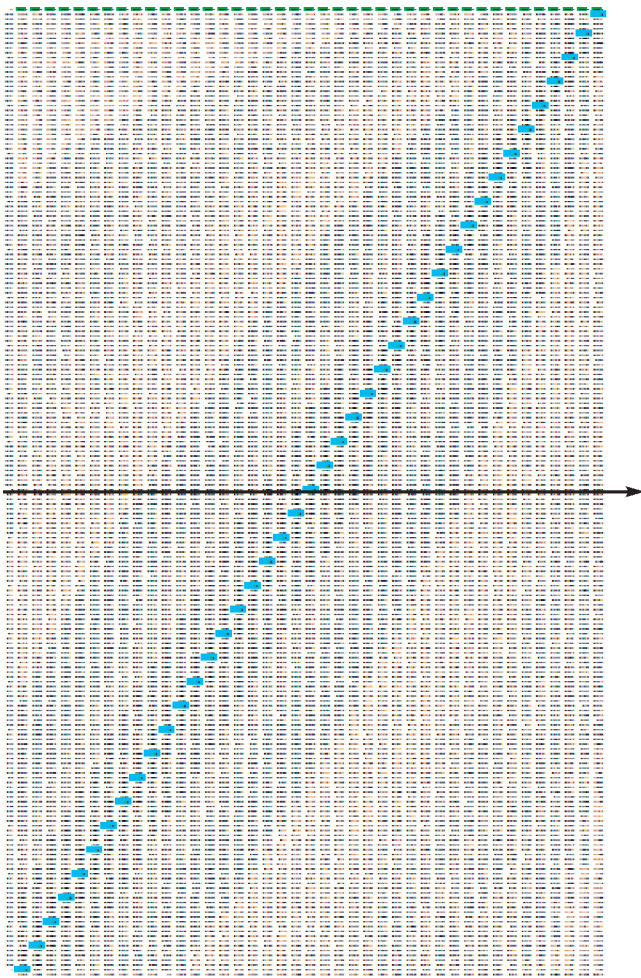


Рис. 3

колонке при заданном значении  $\delta/\sigma$  выделена ячейка, соответствующая минимуму функции  $U$  в зависимости от  $\cos \varphi$ .

Логично, что значению  $\delta = 0$  соответствует угол  $\varphi = \pi$  ( $\cos \pi = -1$ ), т.е. поверхность твердого тела совсем не смачивается жидкостью. Значению  $\delta = \sigma$  соответствует угол  $\varphi = \pi/2$  ( $\cos(\pi/2) = 0$ ), капля имеет в этом случае форму полушара. А значению  $\delta \geq 2\sigma$  соответствует угол  $\varphi = 0$  ( $\cos 0 = 1$ ), и это означает, что жидкость полностью смачивает поверхность твердого тела и растекается по ней тонкой пленкой. Заметим, что если угол смачивания  $\varphi$  найти экспериментально, то можно вычислить величину  $\delta = \sigma(1 + \cos \varphi)$ .

Самый очевидный пример «пары» жидкость–твердое тело это пара жидкая вода–твердый лед. Интуиция подсказывает, что в этом случае примерно выполняется равенство  $\delta = \sigma$ . А это означает, что угол смачивания равен примерно  $90^\circ$ . Это легко проверить экспериментально. Предлагаем читателям сделать это самостоятельно.

Существует метод измерения угла смачивания с помощью наклонной пластинки. Суть метода состоит в том, что плоскую пластинку частично погружают в жидкость и регулируют угол наклона пластинки к горизонту так, чтобы при определенном положении пластинки вся поверхность жид-

кости, в том числе и вблизи линии контакта с пластинкой (там, где обычно возникает мениск), была горизонтальной. Наблюдение мениска (и, соответственно, фиксация угла наклона, при котором мениска нет) производят с помощью лупы или микроскопа.

Как устроены поверхности, которые совсем не смачиваются жидкостью? Пример соответствующих капель и увеличенных во много раз участков несмачиваемой поверхности показан на рисунке 4. Если само вещество, из которого

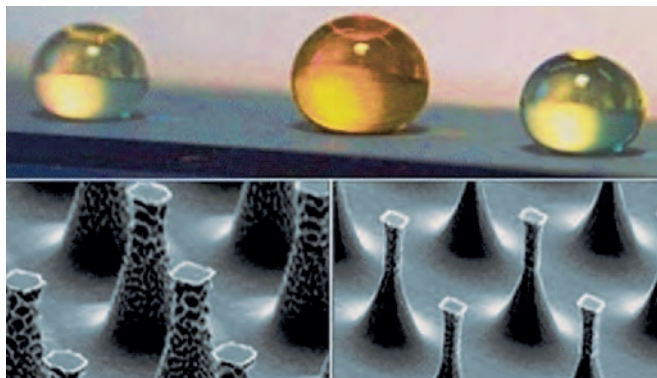


Рис. 4

сделана такая «шероховатая» поверхность, частично смачивается жидкостью, то при изображенной на фотографии микроструктуре поверхности твердого тела площадь контакта жидкости с веществом твердого тела весьма мала, и усредненный по большой поверхности коэффициент  $\delta$  значительно меньше  $\sigma$ .

Кстати сказать, эта фотография явно подталкивает к мысли, что пора учесть наличие гравитации. На ней видно, что кривизна свободной поверхности жидкости в верхней точке явно меньше этой величины во всех других точках поверхности капли. А кривизна  $G$  гладкой кривой поверхности вблизи выбранной точки этой поверхности определяется так. К кривой поверхности в выбранной точке проводится касательная плоская поверхность и от этой точки к касательной плоскости восстанавливается перпендикуляр. Далее проводятся две плоскости, взаимно перпендикулярные друг другу и построенной касательной плоскости. Каждая из этих плоскостей и кривая поверхность имеют общие линии. Эти линии пересекаются как раз в той самой выбранной точке. Пусть радиусы кривизны этих линий вблизи выбранной точки равны  $R_1$  и  $R_2$ . Тогда кривизна кривой поверхности равна сумме их обратных величин:  $G = 1/R_1 + 1/R_2$ . Если кривая поверхность достаточно гладкая, то полученная величина  $G$  не зависит от того, как построены две взаимно перпендикулярные плоскости, перпендикулярные к касательной поверхности.

Понятно, что форма свободной поверхности жидкости определяется балансом давлений по одну и по другую сторону от этой поверхности. Внутри жидкости вблизи самой верхней ее точки давление самое маленькое. Если, например, капля осесимметричная, то радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  вблизи этой точки одинаковы (и равны  $R$ ), и кривизна поверхности равна  $1/R_1 + 1/R_2 = 2/R$ . Давление снаружи капли равно атмосферному давлению  $p_0$ , а внутри оно больше на величину, которая называется давлением Лапласа  $p_L = 2\sigma/R$ . Если выбрать на поверхности капли точку, которая находится ниже самой верхней точки на величину  $h$ , то за счет гравитации давление внутри капли вблизи этой точки будет еще больше на величину  $\rho gh$ , где  $\rho$  – плотность жидкости. Поскольку наружное давление воздуха от точки к точке меняется гораздо меньше, чем давление внутри



жидкости, то равновесие поверхности жидкости устанавливается за счет того, что увеличивается ее кривизна. Отсюда следует критерий малости капель:

$$\frac{2\sigma}{R} \gg \rho g \cdot 2R, \text{ или } R \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Иными словами, существуют характерные размеры, при которых форму капли жидкости определяют в основном поверхностные (капиллярные) явления.

Давайте рассмотрим лежащую на горизонтальной поверхности каплю настолько большую, что ее можно назвать «лужей». В этом случае кривизна поверхности вблизи самой верхней точки капли равна нулю. Пусть лужа будет большой и круглой, а глубина лужи равна  $h$ , тогда можно выбрать две взаимно перпендикулярные плоские поверхности так, что один из радиусов кривизны поверхности вблизи точек периметра пятна контакта жидкости с горизонтальной поверхностью твердого тела будет очень большим, а другой – очень маленьким и равным  $r$ . Кривизна поверхности жидкости в этом месте будет равна  $1/r$ , и условие равновесия жидкости вблизи края лужи (вблизи твердой горизонтальной поверхности) будет иметь вид

$$\frac{\sigma}{r} = \rho gh.$$

Причем это соотношение не зависит от угла смачивания  $\varphi$ .

Разберем теперь две конкретные задачи.

**Задача 1.** Какой будет глубина  $h$  большой по площади лужи на горизонтальном полу, если известны величины  $\rho$ ,  $g$ ,  $\delta$  и  $\sigma$ ?

Когда капля растекается большой лужей площадью  $S$  и глубиной  $h$ , то объем жидкости остается постоянным и равным  $Sh = V$ . Будем отсчитывать потенциальную энергию жидкости в поле тяжести от уровня горизонтальной поверхности, она равна

$$\frac{\rho g S h^2}{2} = \frac{\rho g V h}{2}.$$

Потенциальная энергия, связанная с поверхностными явлениями, приблизительно равна

$$S(2\sigma - \delta) = \frac{V(2\sigma - \delta)}{h}$$

(площадью кривых участков поверхности жидкости вблизи берегов лужи пренебрегаем в сравнении с величиной  $S$ ). Сумма этих двух составляющих потенциальной энергии должна принять минимальное значение. Отсюда находим глубину лужи:

$$h = \sqrt{\frac{2(2\sigma - \delta)}{\rho g}}.$$

Эту глубину можно выразить через угол смачивания:

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \varphi)}{\rho g}}.$$

**Задача 2.** Плоскую алюминиевую пластину большой площади и одинаковой повсюду толщины нагрели, окунули в жидкий парафин, затем вынули и охладили. В результате она оказалась покрытой тонким слоем парафина, который не смачивается водой. Эту пластину аккуратно опустили на поверхность воды, и она не утонула. Какой может быть максимальная толщина этой пластины? Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность алюминия  $2700 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент поверхностного натяжения чистой воды  $70 \text{ мДж/м}^2$ .

Будем плавно опускать пластину, удерживая ее в горизонтальном положении. При этом добьемся того, что жидкость

только-только начинает затекать сверху на края пластины. Пусть это соответствует глубине  $h_1$  расположения верхней поверхности пластины под горизонтальным уровнем воды вдали от пластины:

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_b g}}.$$

Если толщина пластины  $h_2$ , то глубина расположения нижней поверхности пластины под горизонтальным уровнем воды вдали от пластины равна сумме этих двух величин  $h_1$  и  $h_2$ . Условие равновесия пластины будет иметь вид

$$\rho_b \left( 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_b g}} + h_2 \right) = \rho_a h_2.$$

В результате получаем, что максимально возможная толщина пластины будет равна

$$h_2 = \frac{2\sqrt{\sigma/(\rho_b g)}}{(\rho_a/\rho_b) - 1} \approx 9 \text{ мм}.$$

Энергетический параметр  $\sigma$  часто интерпретируют «силовым» способом. Говорят (и пишут), что  $\sigma$  – это сила, действующая вдоль поверхности жидкости и приходящаяся на единицу длины линии, разделяющей свободную поверхность жидкости на две части. При этом предполагается, что участок поверхности жидкости по одну сторону этой разделительной линии «тянет к себе» соответствующий участок поверхности, располагающийся по другую сторону этой линии. Это представление эквивалентно тому, что поверхность жидкости уподобляется равномерно растянутой тонкой резиновой пленке, только в отличие от резины натяжение не меняется при деформации поверхности. Такая интерпретация позволяет решать задачи про поверхностные явления с силовой точки зрения.

Например, вернемся к задаче 1. На рисунке 5 изображен край большой лужи в сечении вертикальной плоскостью.

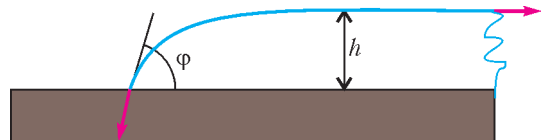


Рис. 5

Выбрав участок вдоль границы лужи длиной  $\lambda$ , рассмотрим силы, действующие на этот участок со стороны окружающих тел. В вертикальном направлении сумма сил тяжести и поверхностного натяжения жидкости на самом краю лужи компенсируется силой реакции со стороны горизонтальной опоры. А в горизонтальном направлении на жидкость действуют силы поверхностного натяжения, показанные стрелками красного цвета, и сила гидростатического давления жидкости, располагающейся справа от выделенного на рисунке участка жидкости. Сумма проекций сил на горизонтальное направление равна нулю:

$$\sigma \lambda - \sigma \lambda \cos \varphi - \frac{\rho g h}{2} \lambda = 0.$$

Отсюда получаем такое же, как найденное ранее другим методом, выражение для глубины лужи:

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \varphi)}{\rho g}}.$$

Вот еще две конкретные задачи.

**Задача 3.** На какую высоту поднимется жидкость с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотнос-

тью  $\rho$  в длинном вертикальном капилляре круглого сечения с внутренним диаметром  $d \ll \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ , один из концов которого опущен в эту жидкость, а другой конец открыт в атмосферу, если жидкость смачивает поверхность стенок капилляра и краевой угол смачивания  $\varphi < \pi/2$ ?

Если исходить из энергетических соображений, то жидкость установится на такой высоте  $h$ , что потенциальная энергия будет иметь минимальное значение. Энергию жидкости в поле тяжести будем отсчитывать от уровня жидкости в сосуде. Предположим, что эта высота  $h$  много больше диаметра  $d$ , тогда вклад в потенциальную энергию гравитации равен примерно

$$U_1 = \frac{\rho g h^2 \pi d^2}{8}.$$

При этом мы пренебрегаем отличием написанного выражения от точного значения, в котором должна присутствовать небольшая поправка, связанная с наличием кривого участка свободной поверхности жидкости. Поверхностная энергия будет примерно равна

$$U_2 = -h\pi d(\sigma - \delta) = -h\pi d\sigma \cos \varphi.$$

В этом выражении мы тоже пренебрегли поправкой, связанной с наличием кривой свободной поверхности жидкости, эта поправка по порядку величины равна  $\sigma\pi d^2/2$ . Минимум суммарной потенциальной энергии, равной  $U_1 + U_2$ , достигается при значении высоты поднятия жидкости в капилляре

$$h = \frac{4\sigma \cos \varphi}{\rho g d}.$$

Попробуем решить эту же задачу силовым способом. По периметру линии касания стенки капилляра и свободной поверхности жидкости на жидкость действует суммарная сила натяжения, у которой имеется вертикальная составляющая, направленная вверх и равная  $\pi d\sigma \cos \varphi$ . Эта сила удерживает «на весу» столбик жидкости в капилляре, на который действует сила тяжести, равная  $\rho h(\pi d^2/4)g$ . Сумма этих сил в состоянии равновесия равна нулю. Отсюда находим высоту столбика жидкости в капилляре:

$$h = \frac{4\sigma \cos \varphi}{\rho g d}.$$

Ответ получился таким же, т.е. оба способа – «энергетический» и «силовой» – одинаково работоспособны, и их можно применять при решении задач, в которых рассматриваются поверхностные явления.

**Задача 4.** Очень тонкую плоскую квадратную пластинку со стороной  $L$  привели одной стороной в соприкосновение с покоящейся жидкостью, до краев заполняющей широкий цилиндрический сосуд с радиусом внутреннего сечения  $R$ , и удерживают пластинку неподвижной так, что она находится в вертикальной плоскости (рис. 6). Жидкость имеет

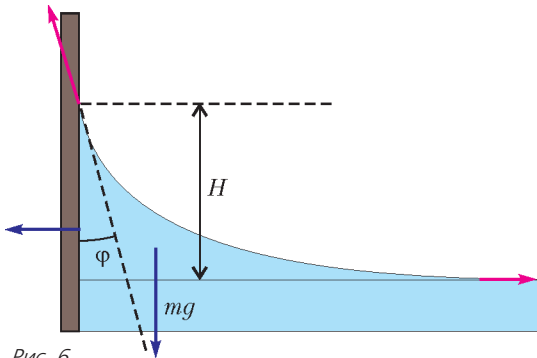


Рис. 6

коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотность  $\rho$ , смачивает эту пластинку, причем угол смачивания  $\varphi < \pi/2$ . На сколько понизился уровень жидкости в сосуде? На сколько верхний край мениска жидкости на пластинке выше уровня жидкости в сосуде?

Так как пластинка тонкая и плоская, площадь поверхности жидкости в сосуде во много раз больше изменения этой площади, возникшего вследствие образования мениска. Объемом пластинки, погруженной в жидкость, поскольку пластинка очень тонкая, можно пренебречь.

Найдем массу жидкости, которая составляет мениск и находится выше плоского уровня жидкости в сосуде. Сила поверхностного натяжения, действующая на жидкость вдоль линии верхней границы мениска, имеет вертикальную составляющую, равную  $F_B = 2L\sigma \cos \varphi$ . Эта сила «приподняла» над плоским уровнем жидкостью массой  $m = F_B/g$  и объемом  $V = m/\rho$ . Следовательно, уровень жидкости в сосуде понизился на

$$\Delta H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2L\sigma \cos \varphi}{\pi R^2 \rho g}.$$

Для нахождения высоты  $H$ , на которую «взобралась» на пластину жидкость, составляющая мениск, рассмотрим условие равновесия жидкости. Сумма всех сил, действующих на эту жидкость, равна нулю, поэтому сумма проекций всех сил на горизонтальное направление тоже равна нулю. Выделим мысленно участок мениска длиной  $\lambda < L$  и уравновесим горизонтальные составляющие действующих на него сил:

$$\sigma\lambda(1 - \sin \varphi) = \frac{\lambda\rho g H^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sin \varphi)}{\rho g}}.$$

А теперь вернемся к началу статьи. На фотографии, приведенной на рисунке 1 внизу, на вертикальной поверхности стекла находятся капли воды. Кривизна  $G_H$  поверхности каждой капли в самой ее нижней точке больше кривизны поверхности  $G_B$  вблизи самой верхней точки этой капли:

$$G_H - G_B = \frac{\rho g H}{\sigma},$$

где  $H$  – разность высот верхней и нижней частей капли. Если поверхность стекла не вертикальна, а составляет некий угол  $\gamma$  с горизонтом, то форма капли в поперечном вертикальном сечении качественно показана на рисунке 7. Видно, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  не одинаковы и не обязаны совпадать с равновесным углом смачивания  $\varphi$ . Одно из объяснений, почему это происходит, кроется на микро- или даже на наноуровне. Поверхность твердого тела не бывает идеально гладкой. Она всегда содержит многочисленные дефекты: выступы и впадины, царапины и участки веществ, отличных от основного компонента твердого тела. Характерные размеры дефектов значительно больше размеров молекул жидкости ( $\sim 10^{-10}$  м), и в то же время они могут быть значительно меньше длин волн, которые попадают в видимый диапазон ( $\sim 5 \cdot 10^{-7}$  м). Иными словами, «на глаз» такая поверхность выглядит абсолютно гладкой, а для жидкости она шершавая. Это тот самый диапазон размеров ( $10^{-9} - 10^{-7}$  м), в котором сейчас развиваются нанотехнологии.

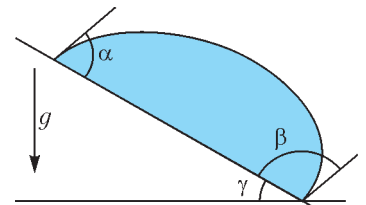


Рис. 7

# Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника

**Е. БАКАЕВ, П. КОЖЕВНИКОВ, И. ЯКОВЛЕВ**

НАЧНЕМ РАЗГОВОР СО СЛЕДУЮЩИХ ДВУХ ЗАДАЧ.<sup>1</sup>

**Задача 1.** Три прямые пересекаются под углами  $60^\circ$  в одной точке  $P$ . Из точки  $O$ , не лежащей на прямых, на них опущены перпендикуляры  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.

**Решение.** На помощь приходит окружность! Так как  $\angle OAP = 90^\circ$ , то точка  $A$  лежит на окружности, построенной на отрезке  $OP$  как на диаметре.

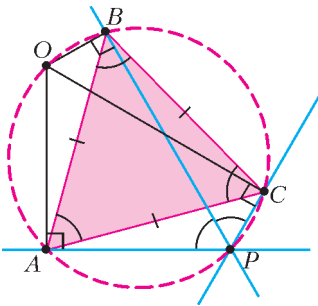


Рис. 1

То же справедливо и для точек  $B$  и  $C$  (рис.1). После того, как показано, что 5 точек  $O, P, A, B, C$  лежат на одной окружности, в дело вступает теорема о вписанных углах. Для определенности считаем, что точки расположены на окружности в порядке  $P, A, B, C$ :  $\angle BAC = \angle BPC = 60^\circ$  и  $\angle BCA = \angle BPA = 60^\circ$ . Тем самым, треугольник  $ABC$  правильный.

**Задача 2.** К окружности проведены касательные в точках  $A$  и  $B$ , пересекающиеся в точке  $P$ . Через точку  $P$  проведена секущая, пересекающая окружность в точках  $K$  и  $L$ . Пусть  $M$  – середина хорды  $KL$ . Докажите, что точки  $P, A, B, M$  лежат на одной окружности.

Есть несколько соображений, которые часто оказываются решающими в доказательстве того, что четыре точки лежат на одной окружности. Скажем, для доказательства вписанности выпуклого четырехугольника  $ABCD$  достаточно доказать, например, что  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$  или что  $\angle ACB = \angle ADB$ . Другой подход – доказать равенство  $AE \cdot CE = BE \cdot DE$ , где  $E$  – точка пересечения диагоналей. Однако читатель может убедиться, что для решения задачи 2 воспользоваться упомянутыми соображениями непросто.

Что еще может нам помочь «уложить» четыре точки на одну окружность? Помогут перпендикуляры!

**Решение.** Заметим, что центр  $O$  окружности – это общая точка пересечения перпендикуляров к прямым  $PA$  и  $PB$ , проведенных соответственно через точки  $A$  и  $B$  (рис.2). Также через точку  $O$  проходит и перпендикуляр к  $PM$ , проведенный через  $M$  (поскольку проекция центра окружности

на хорду – это середина хорды). Теперь все становится совсем просто: точки  $A, B$  и  $M$  лежат на окружности, построенной на отрезке  $OP$  как на диаметре.

Идею, которую мы использовали при решении двух этих задач, можно сформулировать так:

**Теорема.** Даны треугольник  $ABC$  и точка  $P$ . Через точки  $A, B$  и  $C$  провели прямые  $a, b$  и  $c$ , перпендикулярные прямым  $PA, PB$  и  $PC$  соответственно. Прямые  $a, b, c$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки  $A, B, C$  и  $P$  лежат на одной окружности.

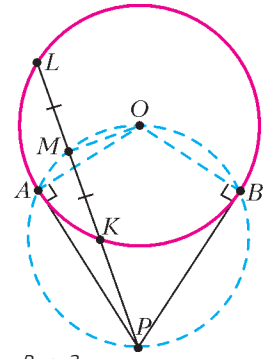


Рис. 2

**Доказательство.** 1) Предположим, что прямые  $a, b, c$  пересекаются в одной точке  $Q$  (рис.3). Тогда  $\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PCQ = 90^\circ$ . Значит, точки  $A, B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $PQ$ .

2) Докажем теперь обратное утверждение. Пусть точки  $A, B, C$  и  $P$  лежат на одной окружности. Рассмотрим точку  $Q$  этой окружности, диаметрально противоположную точке  $P$ . Тогда  $\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PCQ = 90^\circ$ , значит, прямые  $a, b, c$  пересекаются в точке  $Q$ .

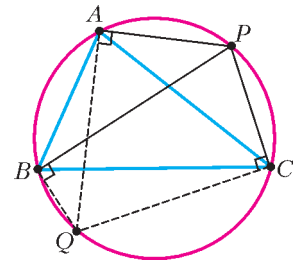


Рис. 3

Далее в статье, пользуясь этой теоремой, мы попробуем разобраться с некоторыми задачами, среди которых есть весьма трудные.

**Задача 3.** Через точку  $P$ , лежащую внутри окружности  $\omega$ , проведены три хорды. Докажите, что середины этих хорд и точка  $P$  лежат на одной окружности (рис. 4).

**Задача 4.** В окружности проведены три хорды, пересекающиеся в одной точке под углами  $60^\circ$ . Докажите, что их середины образуют правильный треугольник (рис.5).

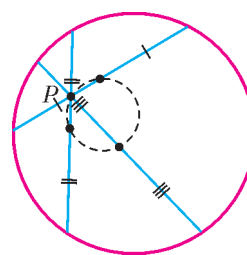


Рис. 4

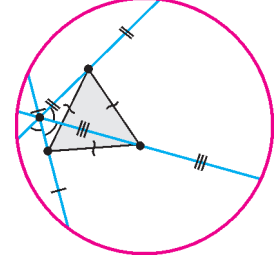


Рис. 5

Докажите, что их середины образуют правильный треугольник (рис.5).

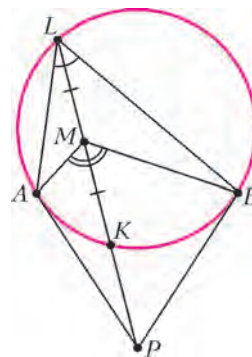


Рис. 6

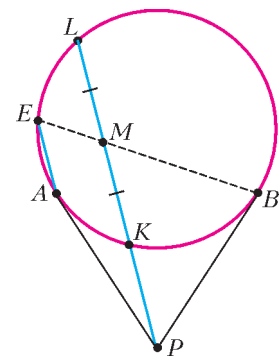


Рис. 7

<sup>1</sup> Далее некоторые задачи приводятся с решениями, а остальные предлагаются читателю для самостоятельного решения.



**Задача 5.** К окружности проведены касательные в точках  $A$  и  $B$ , пересекающиеся в точке  $P$ . Через точку  $P$  проведена прямая, пересекающая окружность в точках  $K$  и  $L$ , причем точка  $K$  лежит между  $P$  и  $L$ . Пусть  $M$  – середина хорды  $KL$ .

- а) Докажите, что  $\angle BMA = 2\angle BLA$  (рис.6).
- б) Через точку  $A$  проведена хорда  $AE$  параллельно  $KL$ . Докажите, что  $BE$  проходит через  $M$  (рис.7).

**Правильные многоугольники**

**Задача 6.** На плоскости даны  $n$  прямых, пересекающихся в одной точке, причем углы между парами соседних прямых равны по  $180^\circ/n$ . Докажите, что для произвольного вектора  $\vec{a}$  сумма проекций этого вектора на данные прямые равна  $n\vec{a}/2$ .

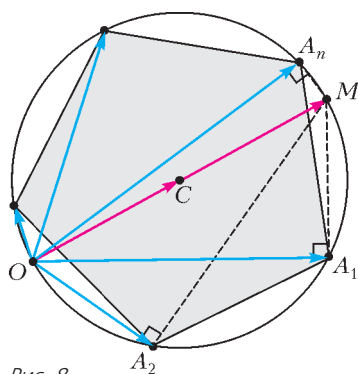


Рис. 8

Решение. Проекция равных векторов на одну и ту же прямую равны. Поэтому можно рассмотреть вектор  $\vec{OM} = \vec{a}$  с началом в точке пересечения данных прямых. Проекция  $A_1, A_2, \dots, A_n$  точки  $M$  на данные прямые лежат на окружности с диаметром  $OM$  и разбивают ее на  $n$  равных дуг (доказательство этого утверждения аналогично решению задачи 1). А значит, точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  являются вершинами правильного  $n$ -угольника (рис.8).

Осталось доказать, что  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = n\vec{a}/2$ . Как известно, если  $C$  – центр правильного многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , то  $\vec{CA}_1 + \vec{CA}_2 + \dots + \vec{CA}_n = \vec{0}$  (иными словами,  $C$  – центр масс многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ).

Докажем это. При повороте вокруг точки  $C$  на  $360^\circ/n$  вершина  $A_1$  перейдет в  $A_2$ ,  $A_2$  – в  $A_3$ , ...,  $A_n$  – в  $A_1$ , а вектор  $\vec{s} = \vec{CA}_1 + \vec{CA}_2 + \dots + \vec{CA}_{n-1} + \vec{CA}_n$  – в вектор  $\vec{CA}_2 + \vec{CA}_3 + \dots + \vec{CA}_n + \vec{CA}_1 = \vec{s}$ , т.е. не изменится. Раз вектор  $\vec{s}$  перешел в себя при повороте, не кратном  $360^\circ$ , то  $\vec{s} = \vec{0}$ .

Итак, представим каждый вектор  $\vec{OA}_i$  как  $\vec{OC} + \vec{CA}_i$ , получим

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = n\vec{OC} + \vec{CA}_1 + \vec{CA}_2 + \dots + \vec{CA}_n = n\vec{OC}.$$

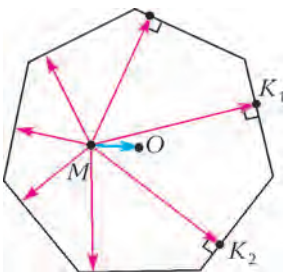


Рис. 9

Точка  $C$  – середина диаметра  $OM$ , значит,  $n\vec{OC} = n\vec{OM}/2 = n\vec{a}/2$ .

**Задача 7** (В.Прасолов, Турнир городов, 1982/83 г., М807). Из произвольной точки  $M$  внутри правильного  $n$ -угольника проведены перпендикуляры  $MK_1, MK_2, \dots, MK_n$  к его сторонам (или их продолжениям). Докажите, что  $\vec{MK}_1 + \dots + \vec{MK}_n = \frac{n}{2} \cdot \vec{MO}$  ( $O$  – центр  $n$ -угольника) (рис.9).

**Задача 8** (И.Митрофанов, Турнир городов, 2012/13 г.).

а) Внутри окружности находится некоторая точка  $A$ . Через  $A$  провели две перпендикулярные прямые, которые пере-

Рис. 10

секали окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.

б) Внутри окружности находится правильный  $2n$ -угольник. Лучи, выпущенные из его центра  $A$  в вершины  $2n$ -угольника, высекают  $2n$  точек на окружности.  $2n$ -угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают  $2n$  новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых  $2n$  точек (рис.10).

Желающие могут обратиться также к статье М.Панова, А.Спивака «Вписанные многоугольники» в «Кванте» №1 за 1999 год. В ней возникает в качестве вспомогательной та же конструкция, что и в задачах этого раздела.

**Проекция на высоты**

В нескольких следующих задачах мы так или иначе встретимся с проекциями точки на прямые, содержащие высоты данного треугольника.

**Задача 9.** Точку спроектировали на высоты треугольника. Докажите, что треугольник, для которого эти три проекции являются вершинами, подобен данному треугольнику (рис.11).

Решение аналогично решению задачи 1.

**Задача 10.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA', BB'$  и  $CC'$ ;  $B_1$  и  $C_1$  – середины высот  $BB'$  и  $CC'$ . Докажите, что  $\triangle A'B_1C_1 \sim \triangle ABC$ .

Указание. Достаточно понять, что перпендикуляры к высотам  $AA', BB'$  и  $CC'$ , проходящие через точки  $A', B_1$  и  $C_1$  соответственно, имеют общую точку. Эта точка – середина стороны  $BC$  (рис.12) (докажите это). Теперь можно применить утверждение предыдущей задачи.

**Задача 11.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA', BB', CC'$ . Докажите, что точки  $A, A'$  и середины отрезков  $BC'$  и  $CB'$  лежат на одной окружности (рис.13).

**Задача 12.** На высотах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  так, что они делят высоты в отношении  $2:1$ , считая от вершины. Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ .

Указание. Опять же, поймем, что перпендикуляры к высотам, проходящие соответственно через точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , пересекаются в одной точке. Догадаетесь, в какой!

**Задача 13** (С.Берлов, Всероссийская олимпиада, 2001 г.). На высотах  $AA', BB'$  и  $CC'$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1, C_1$ , отличные от точки пересечения высот  $H$ , причем сумма площадей треугольников  $ABC_1, BSA_1, CAB_1$  равна площади треугольника  $ABC$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $A_1B_1C_1$ , проходит через точку  $H$  (рис.14).

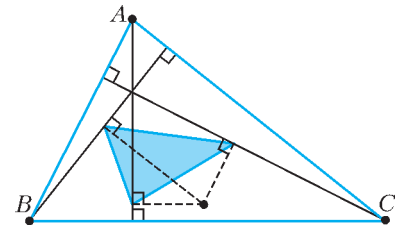


Рис. 11

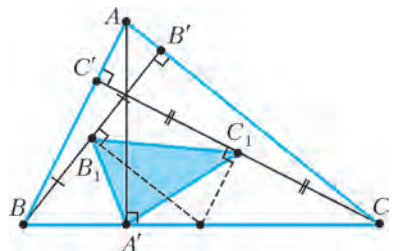


Рис. 12

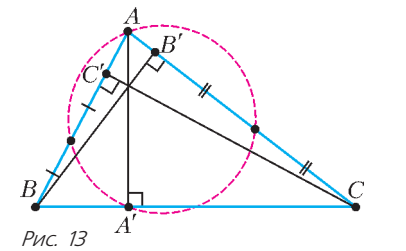


Рис. 13

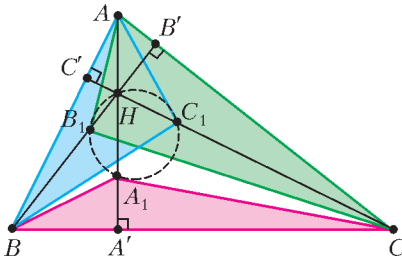


Рис. 14

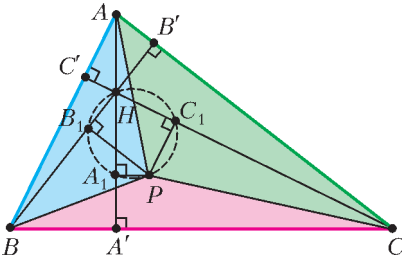


Рис. 15

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{APC} + S_{ABP} = S_{A_1BC} + S_{AB_1C} + S_{ABP}.$$

Следовательно, площади  $\triangle ABP$  и  $\triangle ABC_1$  равны, а значит, точка  $P$  лежит на прямой  $c$ , что и требовалось (рис.15).

Итак, заметим, что эти два условия эквивалентны:

- $S_{A_1BC} + S_{AB_1C} + S_{ABC_1} = S_{ABC}$ ;
- $\frac{A_1A'}{AA'} + \frac{B_1B'}{BB'} + \frac{C_1C'}{CC'} = 1$ .

В этом можно убедиться, поделив обе части первого равенства на  $S_{ABC}$ .

Кроме того, из предыдущей задачи и теоремы следует их эквивалентность еще двум условиям:

- Точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $H$  лежат на одной окружности.
- Перпендикуляры к высотам  $AH, BH, CH$ , проведенные через точки  $A_1, B_1, C_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

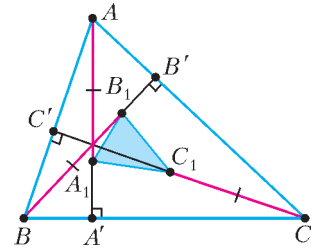


Рис. 16

**Задача 14.** На высотах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  так, что  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2r$ , где  $r$  – радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$  (рис.16).

С помощью предыдущей задачи можно доказать, что перпендикуляры к высотам, проведенные через отмеченные точки, пересекаются в одной точке. (Сделайте это!)

Оказывается, они пересекаются в точке Нагеля (это точка пересечения прямых, соединяющих вершины и точки касания противоположных сторон с внеписанными окружностями треугольника). Соответственно, задача может быть решена и с помощью некоторых геометрических свойств точки Нагеля.

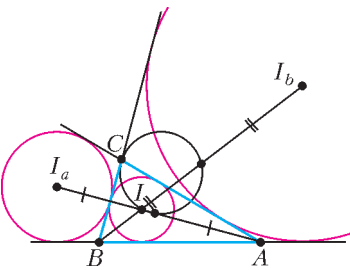


Рис. 17

**Задача 15.** Пусть  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $I_a$  – центр той его внеписанной окружности, которая касается стороны  $BC$ , а  $I_b$  – той, которая касается  $AC$ . Дока-

**Решение.** Проведем перпендикуляры  $a, b, c$  к высотам  $AH, BH, CH$  через точки  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Докажем, что они пересекаются в одной точке – тогда точки  $A_1, B_1, C_1, H$  будут лежать на одной окружности. Рассмотрим точку  $P$  пересечения прямых  $a$  и  $b$  и докажем, что  $c$  проходит через ту же точку. Площади  $\triangle PBC$  и  $\triangle A_1BC$  равны, так как их высоты равны, а основания совпадают. Аналогично, площади  $\triangle APC$  и  $\triangle AB_1C$  равны. Запишем:

жите, что точки  $C, I$  и середины отрезков  $AI_a$  и  $BI_b$  лежат на одной окружности (рис.17).

**Задача 16.** Пусть  $A_1$  – точка описанной окружности треугольника  $ABC$ , противоположная точке  $A$ . Точка  $A_2$  симметрична точке  $A_1$  относительно прямой  $BC$ . Аналогично определяются точки  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите, что окружность, проходящая через точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$ , проходит через ортоцентр треугольника  $ABC$  (рис.18).

*Замечание.* Обобщение этого утверждения см. в книге «Геометрия в картинках» А.Акопяна, задача 4.2.9.

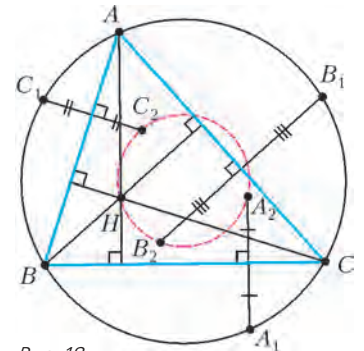


Рис. 18

**Проекция H на медиану, проекция O на симедиану**

**Задача 17.** а) Пусть  $H_a$  – проекция ортоцентра  $H$  треугольника  $ABC$  на прямую, содержащую медиану, проведенную из вершины  $A$ . Докажите, что  $H, H_a, B, C$  лежат на одной окружности.

б) Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $M$  – середина стороны  $BC$ ,  $P$  – вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника  $ABC$  с окружностью, построенной на отрезке  $AH$  как на диаметре. Тогда точки  $M, H$  и  $P$  лежат на одной прямой.

**Решение.** а) Достаточно доказать, что перпендикуляры к  $HV$  и  $HC$ , проходящие соответственно через точки  $B$  и  $C$ , пересекаются на прямой, содержащей медиану. А они пересекаются в точке  $X$  такой, что  $ABXC$  – параллелограмм (рис.19).

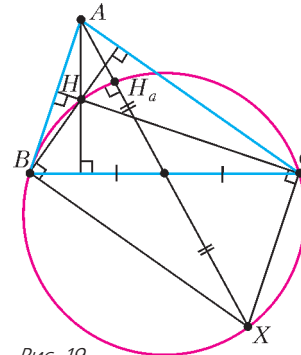


Рис. 19

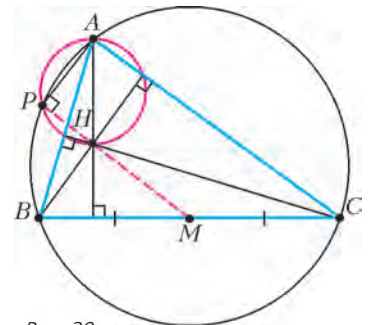


Рис. 20

б) На одном из занятий кружка при разборе этой задачи ученики обратили внимание, что она фактически эквивалентна предыдущей: для треугольника  $BHC$  точка  $A$  является ортоцентром, а  $HM$  – медианой. Если  $P'$  – проекция  $A$  на  $HM$ , то по предыдущей задаче  $P'$  будет лежать на окружности  $ABC$ , поэтому  $P' = P$  (рис.20). (Этой конструкции посвящена статья Ю.Блинкова «Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и еще одна точка!» в «Кванте» №2 за 2014 год.)

**Задача 18** (Турнир имени А.П.Савина, 2015 г.). Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а  $P$  и  $Q$  – точки касания этих окружностей с

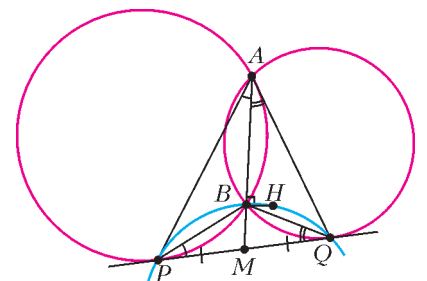


Рис. 21

их общей касательной. Точка  $H$  – ортоцентр треугольника  $PAQ$ . Докажите, что угол  $AVH$  прямой.

**Решение.** Продлим  $AB$  до пересечения с  $PQ$  в точке  $M$  (рис.21). Она будет делить отрезок  $PQ$  пополам, так как  $MP^2 = MA \cdot MB = MQ^2$ . Из предыдущей задачи мы знаем, что проекция ортоцентра треугольника  $PAQ$  на его медиану  $AM$  лежит на описанной окружности треугольника  $RHQ$ . Итак, чтобы доказать, что  $B$  – проекция  $H$  на медиану  $AM$ , достаточно доказать, что точки  $P, Q, H$  и  $B$  лежат на одной окружности. Для этого докажем равенство  $\angle RHQ = \angle RBQ$ . Имеем

$$\begin{aligned} \angle RBQ &= 180^\circ - \angle BRQ - \angle BQR = \\ &= 180^\circ - \angle QAB - \angle PAB = 180^\circ - \angle PAQ. \end{aligned}$$

Так же и  $\angle RHQ = 180^\circ - \angle PAQ$ .

**Задача 19.** Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $A_0$  определяется как такая точка внутри угла  $BAC$ , из которой стороны  $AB$  и  $AC$  видны под углами  $(180^\circ - \angle B)$  и  $(180^\circ - \angle C)$  соответственно. Аналогично определяются точки  $B_0$  и  $C_0$ . Докажите, что прямые  $AA_0, BB_0, CC_0$  пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на одной окружности с точками  $A_0, B_0$  и  $C_0$ .

**Решение.** Все точки внутри угла  $BAC$ , из которых сторона  $AB$  видна под углом  $(180^\circ - \angle B)$ , лежат на одной окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Заметим, что эта окружность касается стороны  $BC$  в точке  $B$ . Аналогично, все точки внутри угла  $BAC$ , из которых сторона  $AC$  видна под углом  $(180^\circ - \angle C)$ , лежат на окружности, проходящей через точку  $A$  и касающейся стороны  $BC$  в точке  $C$ . Раз точка  $A_0$  обладает этими двумя свойствами, то она лежит на пересечении этих окружностей. Теперь видна связь с предыдущей задачей – чем была точка  $B$  для треугольника  $PAQ$  в

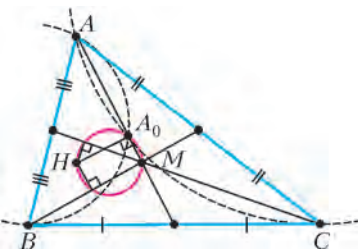


Рис. 22

предыдущей задаче, тем является точка  $A_0$  для треугольника  $ABC$  в этой. Таким образом,  $A_0$  – проекция ортоцентра  $H$  треугольника  $ABC$  на медиану. То же верно для точек  $B_0$  и  $C_0$ .

Значит, прямые  $AA_0, BB_0, CC_0$  являются медианами треугольника  $ABC$  и пересекаются в одной точке  $M$ , а точки  $A_0, B_0$  и  $C_0$  лежат на окружности с диаметром  $HM$  (рис.22).

От медианы перейдем к симедиане. Это прямая, симметричная медиане относительно соответствующей биссектрисы (см. например, статью Ю.Блинкова «Симедиана» в «Кванте» № 4 за 2015 г.) По-другому описать симедиану можно так: пусть к описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$  проведены касательные в точках  $B$  и  $C$  до пересечения в точке  $K$ . Тогда прямая  $AK$  – симедиана треугольника  $ABC$ .

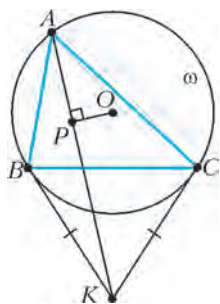


Рис. 23

Пусть  $P$  – проекция центра  $O$  окружности  $\omega$  на симедиану  $AK$  (рис.23).

**Задача 20. а)** Докажите, что точки  $B, C, O$  и  $P$  лежат на одной окружности.

**б)** Докажите, что  $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ .

**Решение.** а) Ту же конструкцию мы видели при решении задачи 2: эти точки лежат на окружности, построенной на  $OK$  как на диаметре.

б) Пусть точки расположены, как на рисунке 24 (другие случаи расположения точек рассматриваются аналогич-

но). Пусть  $\angle BAC = \alpha$ . Используя то, что точки  $B, P, O, C, K$  лежат на одной окружности и что  $\angle BAC$  и  $\angle BOC$  – соответственно вписанный и центральный углы одной окружности, получим  $\alpha = \angle BAC = \angle BOC/2 = \angle BPC/2$ . Отрезки касательных  $KB$  и  $KC$  равны, значит, равны опирающиеся на них углы:  $\angle BPK = \angle CPK$ . При этом  $\angle BPK + \angle CPK = \angle BPC = 2\alpha$ , значит,  $\angle BPK = \angle CPK = \alpha$ . Углы  $\angle BPK$  и  $\angle CPK$  – внешние для  $\triangle PAB$  и  $\triangle PCA$  соответственно, значит, в этих треугольниках равны углы  $\angle BPA$  и  $\angle CPA$ . Остало доказать равенство еще какой-нибудь пары углов этих треугольников. Так как  $\angle BPK = \alpha$  – внешний для  $\triangle PAB$ , то  $\angle PAB + \angle PBA = \alpha$ . Но и  $\angle PAB + \angle PAC = \angle BAC = \alpha$ , откуда следует равенство  $\angle PBA = \angle PAC$ . Мы доказали, что в  $\triangle PAB$  и  $\triangle PCA$  две пары углов равны, значит, они подобны.

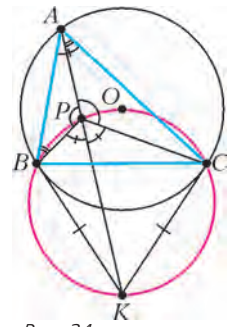


Рис. 24

**Задача 21** (Всероссийская олимпиада, 1999 г.). Дан треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность с центром  $O$ . Окружность  $\omega_1$  проходит через точки  $A, B$  и касается прямой  $AC$  в точке  $A$ . Аналогично, окружность  $\omega_2$  проходит через точки  $A, C$  и касается прямой  $AB$  в точке  $A$ . Пусть  $A_0$  – вторая (отличная от  $A$ ) точка пересечения этих окружностей. Докажите, что  $\angle AA_0O = 90^\circ$  (рис.25).

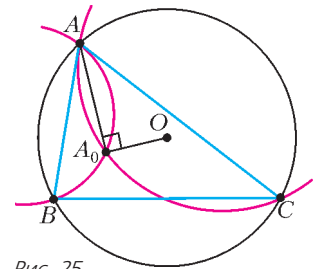


Рис. 25

Симедианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Лемуана* треугольника.

**Задача 22.** Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $A_0$  определяется как такая точка внутри угла  $BAC$ , из которой стороны  $BA$  и  $AC$  видны под углом  $(180^\circ - \angle A)$ . Аналогично определяются точки  $B_0$  и  $C_0$ . Докажите, что  $A_0, B_0, C_0$  и точка Лемуана  $L$  лежат на одной окружности.

Можно заметить связь между сериями задач 17–19 и 20–22: изогонально сопряженные точки  $H$  и  $O$  проектируются на медиану и симедиану, которые симметричны относительно биссектрисы. Более общий факт сформулирован в задаче M2401 «Задачника «Кванта».

### Проекция на серединные перпендикуляры и точки Брокера

Точка  $P$ , лежащая внутри треугольника  $ABC$ , называется *первой точкой Брокера*, если  $\angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$ . Аналогично, для *второй точки Брокера*  $Q$  должны выполняться условия  $\angle BAQ = \angle CBQ = \angle ACQ$ .

Мы докажем некоторые их свойства. Сделать это нам поможет наша теорема и уже упомянутая точка Лемуана.

Пусть  $A', B', C'$  – проекции точки  $L$  на серединные перпендикуляры  $OA_0, OB_0, OC_0$  треугольника  $ABC$  (здесь  $A_0, B_0, C_0$  – середины сторон  $BC, CA, AB$  соответственно;  $O$  – центр описанной окружности;  $L$  – точка Лемуана).

Для начала докажем такое свойство этой конструкции: **Свойство а)** Треугольники  $\triangle A'BC, \triangle B'CA, \triangle C'AB$  подобны.

**Доказательство.** Используем следующее свойство точки Лемуана: расстояния от нее до сторон треугольника пропорциональны длинам этих сторон. (Это можно вывести из того, что симедиана есть геометрическое место точек, удаленных от сторон пропорционально их длинам. Доказательство можно найти в уже упомянутой статье «Симедиана».)



Расстояния от точки Лемуана до сторон треугольника равны длинам высот треугольников  $\Delta A'BC$ ,  $\Delta B'SA$ ,  $\Delta C'AB$ . Соответственно, длины высот этих треугольников пропорциональны длинам их оснований. Значит, равнобедренные треугольники  $\Delta A'BC$ ,  $\Delta B'SA$ ,  $\Delta C'AB$  подобны, так что

$$\angle A'BC = \angle A'CB = \angle B'SA = \angle B'SA = \angle C'AB = \angle C'BA$$

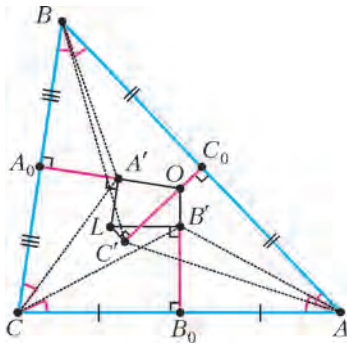


Рис. 26

Пусть  $AB'$  вторично пересекает  $\beta$  в точке  $X$ . Поскольку угол между прямыми  $B'X$  и  $B'L \parallel AC$

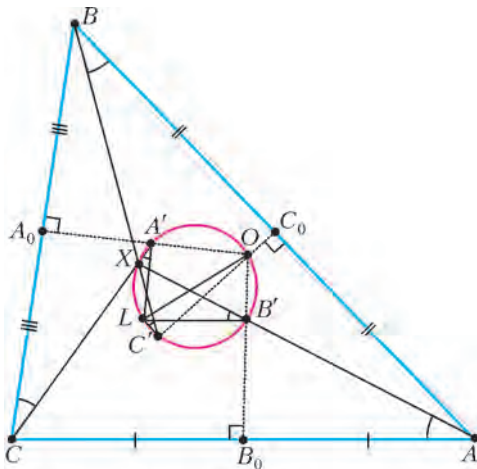


Рис. 27

равен  $\varphi$ , дуга  $LX$  равна  $2\varphi$ . Рассматривая вторые точки пересечения прямых  $BC'$  и  $CA'$  с  $\beta$ , понимаем, что они совпадают с  $X$ .

Заметим, что для точки  $X$  выполняется условие точки Брокера:  $\angle ABX = \angle BCX = \angle CAX$ . Таким образом, мы доказали существование точки с таким свойством (а доказательство единственности оставляем читателю). Итак, точки  $X$  и  $P$  совпадают, значит, три прямые  $AB'$ ,  $BC'$ ,  $CA'$  пересекаются в точке Брокера  $P$ .

Аналогично доказывается, что три прямые  $CB'$ ,  $AC'$ ,  $BA'$  пересекаются во второй точке Брокера  $Q$ .

Попутно мы доказали, что углы Брокера для первой и второй точек Брокера равны. (Действительно, ведь  $\angle ABP = \angle BAQ = \varphi$ .)

**Свойство в)** Точки Брокера лежат на окружности с диаметром  $OL$  и симметричны относительно этого диаметра.

**Доказательство.** Общая точка  $Q$  прямых  $CB'$ ,  $AC'$ ,  $BA'$  также лежит на окружности  $\beta$ , дуга  $LQ$  тоже равна  $2\varphi$  (только дуги  $LP$  и  $LQ$  отложены в разные стороны от точки  $L$ ), тем самым,  $P$  и  $Q$  симметричны относительно диаметра  $OL$ .

(рис.26). Обозначим этот угол через  $\varphi$ .

**Свойство б)** В описанной конструкции прямые  $AB'$ ,  $BC'$ ,  $CA'$  пересекаются в одной точке – первой точке Брокера  $P$ . (И, аналогично, прямые  $CB'$ ,  $AC'$ ,  $BA'$  пересекаются во второй точке Брокера  $Q$ .)

**Доказательство.** Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на окружности  $\beta$ , построенной на отрезке  $OL$  как на диаметре (рис.27).

Еще раз о велосипедистах

**Задача 23.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $P$  проводятся прямые, пересекающие окружности в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что середины  $M$  всевозможных отрезков  $AB$  лежат на фиксированной окружности, проходящей через  $P$  и  $Q$  (рис.28).

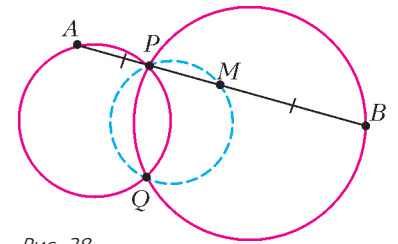


Рис. 28

**Решение.** Достаточно доказать, что перпендикуляр к  $PQ$ , проведенный через  $Q$ , и перпендикуляры к  $AB$ , проведенные через  $M$ , проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора прямой  $AB$ . Пусть перпендикуляр к  $PQ$ , проведенный через  $Q$ , пересекает окружности в точках  $K$  и  $L$  (рис.29), а к  $AB$ , проведенный через  $M$ , пересекает  $KL$  в точке  $X$ . Тогда  $PK$  и  $PL$  – диаметры окружностей, значит,  $AK \perp AB$ ,  $BL \perp AB$ . Видим, что  $MX$  – средняя линия прямоугольной трапеции  $AKLB$ , поэтому  $X$  – середина  $KL$ , т.е. фиксированная точка.

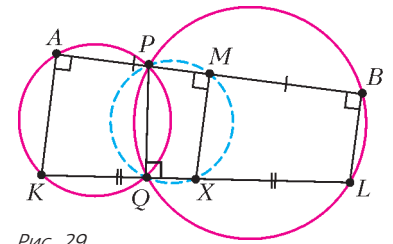


Рис. 29

Из этого решения мы получаем также, что для любого положения прямой  $AB$  точка  $X$  равноудалена от точек  $A$  и  $B$ . О многих интересных конструкциях, связанных с этой задачей, можно прочитать в статье В.Протасова «О двух велосипедистах и вишневой косточке» в «Кванте» №3 за 2008 год.

А что в пространстве?

Оказывается, соображения, о которых мы говорили выше, помогают и при решении пространственных задач.

**Задача 24.** Через данную точку  $P$  проводят прямые, пересекающие данный шар  $s$  по отрезкам. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной сфере.

**Решение.** Середина  $A$  отрезка, полученного при пересечении шара прямой  $a$ , – проекция центра  $O$  шара на эту прямую. Соответственно,  $\angle OAP = 90^\circ$ , т.е. все полученные таким образом точки  $A$  лежат на одной сфере с диаметром  $OP$ .

**Задача 25.** Через данную точку  $P$  проводят плоскости, пересекающие данный шар  $s$  по кругам. Докажите, что центры этих кругов лежат на одной сфере.

**Задача 26.** Основанием пирамиды является вписанный многоугольник. Докажите, что центры описанных окружностей боковых граней этой пирамиды лежат на одной сфере.

**Задача 27. а)** (И.Митрофанов, Турнир городов, 2012/13 г.) Внутри сферы находится некоторая точка  $A$ . Через  $A$  провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

б) Внутри сферы находится додекаэдр, его центр  $A$  не обязательно совпадает с центром сферы. 15 прямых, каждая из которых проходит через середины противоположных ребер додекаэдра, высекают 30 точек на сфере. Додекаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь прямые высекают 30 новых точек. Докажите, что

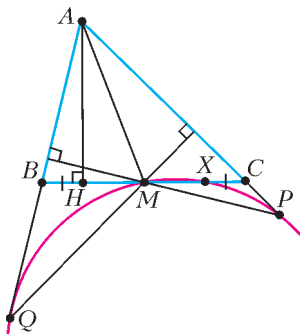


Рис. 30

их центр масс совпадает с центром масс старых 30 точек.

**В завершение...**

Покажем, как обсуждаемый в этой статье прием помогает решить задачу с последней Всероссийской олимпиады.

**Задача 28** (М. Дидин, Всероссийская олимпиада, 2015 г.). В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$  и высота  $AH$ . На прямых  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $QM \perp AC$  и  $PM \perp AB$ . Окружность, описанная около треугольника  $PMQ$ , пересекает прямую  $BC$  вторично в точке  $X$ . Докажите, что  $BH = CX$  (рис. 30).

**Решение.** Пусть  $P'$  и  $Q'$  – точки, симметричные соответственно точкам  $P$  и  $Q$  относительно  $M$ . Для решения задачи достаточно показать, что  $P', Q', M$  и  $H$  лежат на одной окружности, или что перпендикуляры к  $MP', MQ', MH$ , проведенные через  $P', Q'$  и  $H$  соответственно, пересекаются в одной точке (рис. 31).

Рассмотрим треугольник  $MQP'$ . В нем  $QB \perp MP'$  по условию; кроме того,  $P'VB$  – параллелограмм, так что  $P'B \parallel PC \perp QM$ . Поэтому  $B$  – точка пересечения высот треугольника  $MQP'$ , т.е.  $P'Q \perp MB$ . Аналогично,  $MC \perp PQ'$ .

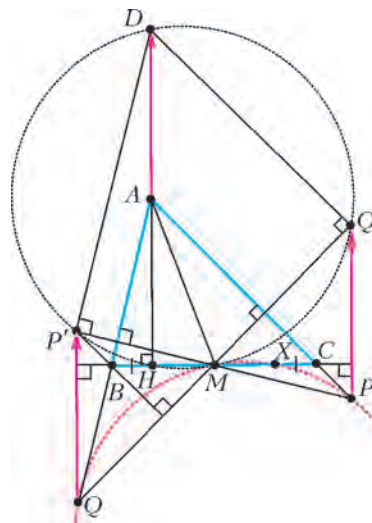


Рис. 31

Заметим, что  $\overline{PQ'} = \overline{QP'}$ , так как  $PQP'Q'$  – параллелограмм. Отложим от  $A$  вектор  $\overline{AD}$ , равный этим двум векторам. Тогда  $P'D \parallel AQ \perp MP'$ ,  $Q'D \parallel AP \perp MQ'$  и  $DH \perp MH$ . Итак,  $D$  – общая точка интересующих нас перпендикуляров.

(Другое решение последней задачи можно найти на с. 85 в этом номере журнала.)

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Камера-обскура в вашем доме

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

ЛЮБУЮ КОМНАТУ МОЖНО ПРЕВРАТИТЬ В БОЛЬШУЮ камеру-обскуру (лат. camera obscura – темная комната). Достаточно полностью затемнить все окна, оставив в одном из них маленькую дырочку диаметром в несколько миллиметров. Световые лучи, проходящие через это отверстие, нарисуют на стенах и потолке точное подобие внешнего мира, перевернув его «вниз головой».

**Как мы это сделали.** У нас был большой выбор – в нашем распоряжении были все аудитории Московского государственного университета геодезии и картографии. Мы остановились на компьютерном классе, из окон которого виден внутренний дворик университета и храм Никиты Мученика, расположенный на углу Старой Басманной улицы и Гороховского переулка (рис.1).

При подготовке камеры-обскуры большая часть времени ушла на затемнение окон. Мы взяли широкую и плотную черную полиэтиленовую пленку, по ширине полностью перекрывающую окно. Пленку с помощью двухстороннего скотча прикрепили к раме и оконному проему. Потом мы еще усилили это крепление широким черным скотчем.

В пленке, закрывающей одно из окон, вырезали отверстие

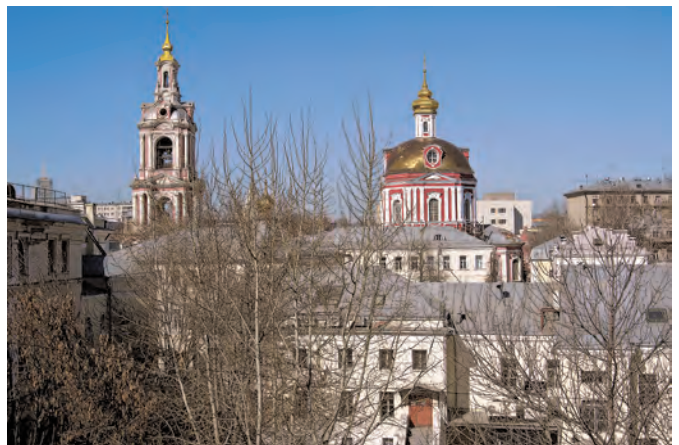


Рис. 1. Вид из окна

размером  $2 \times 2$  см, потом закрыли его диафрагмой – черным квадратом со стороной 10 см и с маленьким отверстием в центре. Заранее было изготовлено несколько таких диафрагм с диаметрами отверстий от 1,5 до 4 мм, чтобы их можно было быстро поменять.

Закрыли дверь, выключили свет, и ... наступила полная темнота. Тем не менее, мы включили камеру и после 30-секундной выдержки получили удивительную картину (рис.2). На левой стене аудитории видны окна старого корпуса университета. На экране, расположенном около дальней стенки, виден фрагмент храма. Для неадаптированного к темноте глаза аудитория кажется абсолютно темной. Но за 30 секунд камера накапливает достаточное количество светового излучения, чтобы получилось живое



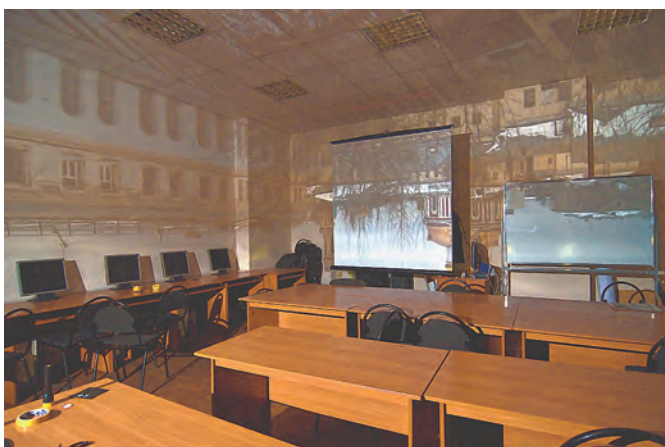


Рис. 2. Изображение внешнего мира на стенах и потолке аудитории, на экране и стоящей рядом с ним учебной доске

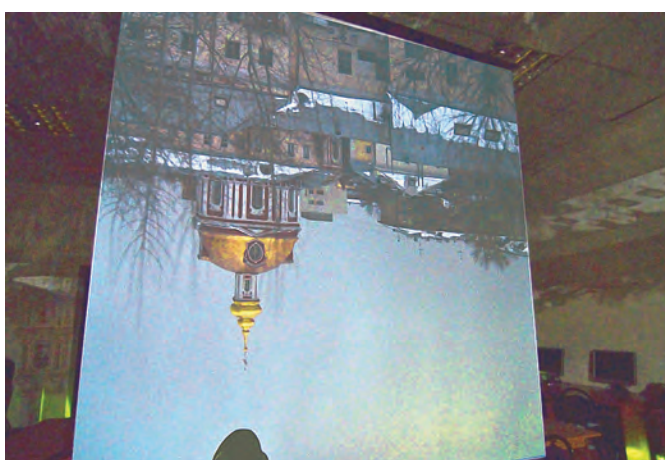


Рис. 3. Изображение на экране, приближенном к отверстию в окне; внизу видна тень от камеры, установленной на штативе

изображение. А после получасового пребывания в темноте происходит адаптация, и все эти изображения на стенах и потолке становятся видимыми невооруженным глазом.

Вот еще фотография, сделанная внутри той же камеры-обскуры (рис.3).

**Используем линзу.** В конце прошлого года мы с недельным интервалом прочитали две лекции для школьников. Одна называлась «Камера-обскура – хорошо забытое старое», другая – «Радуга Декарта–Ньютона–Юнга». После каждой лекции мы решили показывать школьникам работу нашей камеры. На лекции записалось много народу, поэтому, во-первых, пришлось разбить посещение камеры-обскуры на сеансы, а во-вторых, не было никакой возможности каждый раз тратить по полчаса на адаптацию к темноте. В связи со всем этим мы заменили миллиметровое отверстие в диафрагме на слаболожительную линзу диаметром 4 см. Яркость изображения при этом значительно возросла, и на адаптацию глаза теперь уходили считанные минуты.

**25.10.2014 – наблюдение солнечных пятен.** В день, когда была прочитана вторая лекция, нам повезло. Стояла солнечная погода, и с помощью камеры-обскуры с диаметром входного отверстия 3 мм удалось показать школьниками пятна на Солнце.

На первой фотографии (рис.4, слева), сделанной с экрана, удаленного от окна на 5 м, видны голая веточка на фоне Солнца и группа солнечных пятен. Представленный на том же рисунке справа снимок НАСА позволяет иденти-

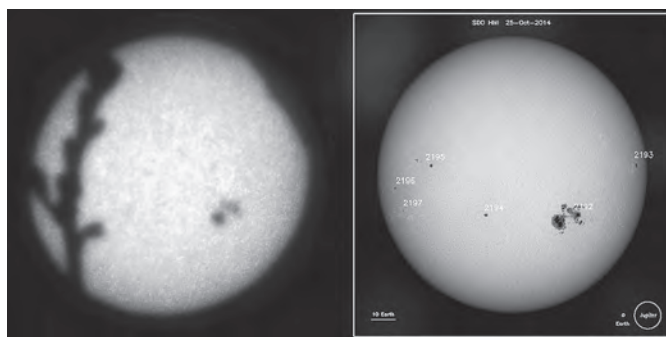


Рис. 4. Слева – снимок с экрана, снято 25.10.2014 в 12 ч 10 мин; справа – снимок НАСА

фицировать эту группу пятен как группу № 2192. Для простоты сравнения наш исходный кадр был переориентирован – отражен сверху вниз и повернут.

На следующей фотографии (рис.5), сделанной через минуту, Солнце сместилось, и ветка перекрыла другой край

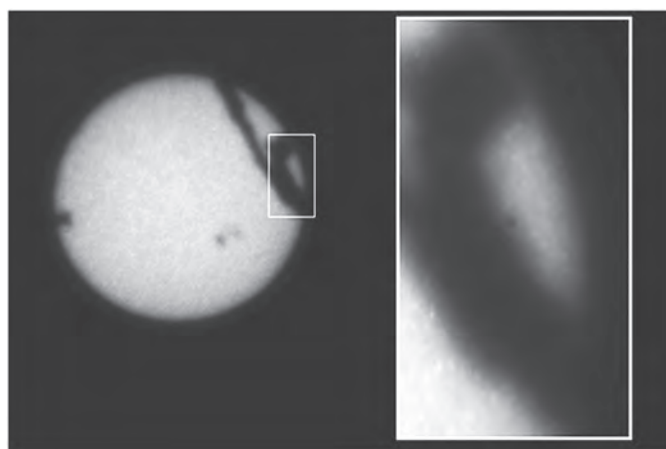


Рис. 5. Слева – снимок с экрана, справа – увеличенный фрагмент, снято 25.10.2014 в 12 ч 11 мин

солнечного диска. Похоже, что в полутени этой ветки угадывается более мелкое пятно – № 2193.

Понятно, что все описанные здесь эксперименты легко воспроизводимы. Превратив свою комнату в большую камеру-обскуру, вы сможете провести их, не выходя из дома. Для начала диаметр входного отверстия в диафрагме можно взять равным 3 мм, потом попробовать другие размеры. Если хотите вместо маленького отверстия использовать линзу, а расстояние от окна до противоположной стены у вас составляет  $L$  метров, то проще всего взять линзу для очков с оптической силой  $+1/L$  диоптрий. Наблюдения лучше проводить в солнечный день.

В заключение – несколько ссылок.

- Прежде всего, попытайтесь отыскать в интернете ролик под названием «Камера-обскура – отрывок из серии «Гении фотографии» с известным американским фотографом Абелардо Мореллом.

- Посмотрите веселый ролик по адресу [http://yellowdog.ru/blog/i/camera\\_obscura](http://yellowdog.ru/blog/i/camera_obscura)

- А на сайте [http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/synoptic/sunspots\\_earth/](http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/synoptic/sunspots_earth/) можно найти использованную нами фотографию НАСА.

- Наконец, рекомендуем прочитать статью В.Сурдина и М.Карташева «Камера-обскура» в «Кванте» №2 за 1999 год (<http://kvant.ras.ru/pdf/1999/02/kv0299surdin.pdf>)



# Чертим кривые второго порядка!

В этом «Калейдоскопе» мы расскажем о некоторых приспособлениях, позволяющих точно чертить кривые второго порядка: параболы, эллипсы, гиперболы.

## Параболограф Кавальери

Этот элегантный способ рисования параболы придумал итальянский математик Бонавентура Кавальери (итал. Bonaventura Francesco Cavalieri, лат. Cavalerius, 1598 – 1647) еще в 17 веке.

**Описание конструкции.** По неподвижной относительно листа линейке скользит прямой угол так, что одна из его сторон (горизонтальная) постоянно соприкасается с линейкой (рис.1). У второго прямого угла вершина с грифелем скользит вдоль вертикальной стороны первого, а стороны скользят так, что все время проходят через штыри, один из которых жестко закреплен на линейке, а другой – на горизонтальной стороне подвижного угла.

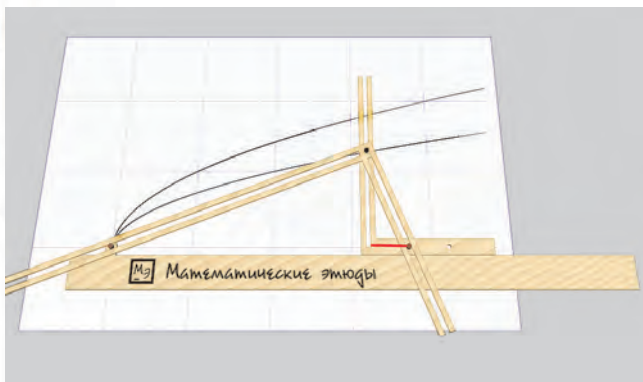


Рис. 1

**Обоснование.** Рассмотрим треугольник, образованный сторонами второго угла и линейкой. В нем квадрат длины высоты, опущенной на гипотенузу, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Одна из проекций по конструкции постоянна (красный отрезок на рисунке 1) и является параметром, определяющим параболу (выведите отсюда ее уравнение).

## Рисование параболы с помощью нити

**Описание конструкции.** По неподвижной относительно листа линейке скользит угольник так, что один из катетов (горизонтальный) постоянно соприкасается с линейкой. Один конец нити закрепляется в вершине угольника, не лежащей на линейке, другой конец нити закреплен кнопкой на листе бумаги. Карандаш прижимает нить к катету угольника так, чтобы она всегда была натянута (рис. 2, 3).

**Обоснование.** Допустим, длина нити равна длине вертикального катета (в качестве упражнения предлагаем свести общий случай к этому частному случаю). Тогда грифель всегда равноудален от линейки и кнопки на листе. Это согласуется с геометрическим опре-

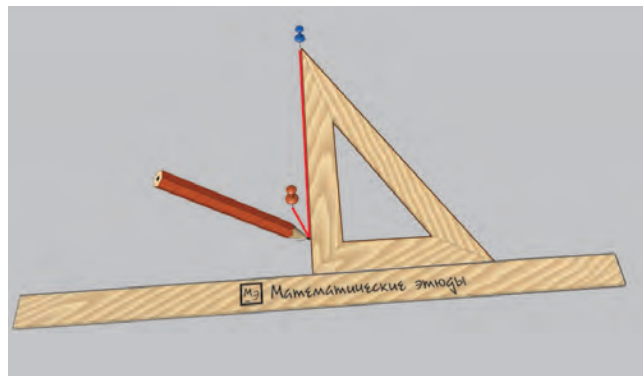


Рис. 2

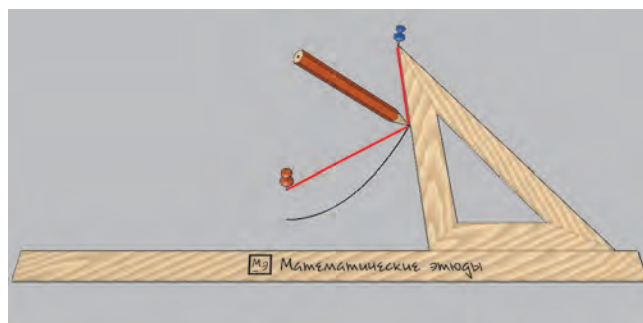


Рис. 3

делением параболы (линейка – директриса, красная кнопка – фокус).

## Эллипсографы

**Описание конструкции.** На линейке закреплены два штыря и грифель, штыри скользят по двум перпендикулярным пазам направлениям. На рисунке 4 грифель  $M$  делит отрезок между штырями на отрезки длины  $a$  и  $b$  (в частном случае  $a = b$  получится окружность – см. знаменитую задачу «котенок на лестнице» из книги Н.Б.Васильева, В.Л.Гутенмахера «Прямые и кривые»), на рисунке 5 грифель  $K$  расположен вне отрезка между штырями.

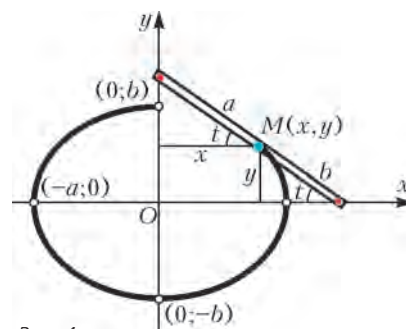


Рис. 4

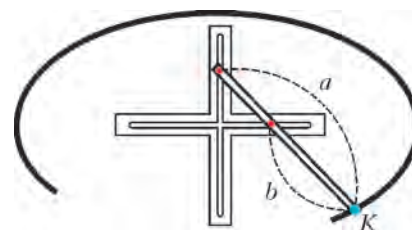


Рис. 5

К линейке можно прикрепить тре-

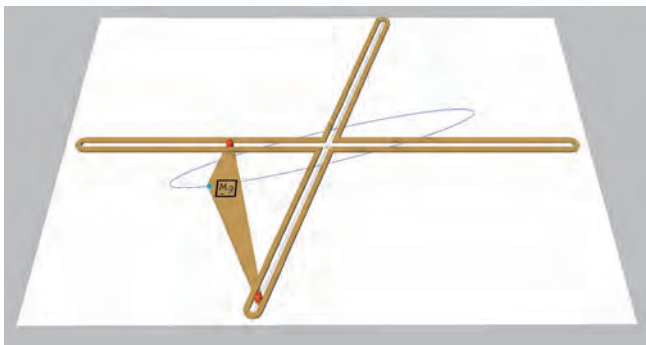


Рис. 6

угольник и поместить грифель в третью его вершину. В этом случае грифель тоже начертит эллипс (рис. 6, здесь пазы уже не являются осями эллипса).

Подобные устройства встречались в работах Леонардо да Винчи, но по-видимому были известны и раньше.

**Обоснование:** Рисунок 4 сразу дает возможность в системе координат, связанной с пазами, записать координаты грифеля:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , откуда получить уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Попробуйте доказать (весьма непростая задача!), что эллипс получится и на рисунке 6. В предложенном способе пазы можно брать не обязательно перпендикулярными – все равно грифель нарисует некоторый эллипс.

#### Рисование эллипса с помощью нити

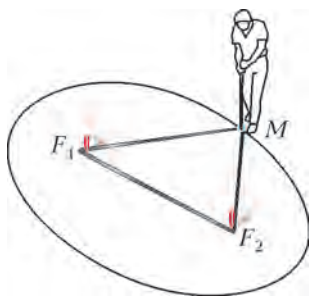


Рис. 7

**Описание конструкций.** На рисунке 7 показан первый способ: два кольшкa и веревка, натягиваемая чертящим инструментом.

Во втором способе на плашку-эллипс накинута нить, имеющая длину большую, чем периметр плашки. Карандаш ведут так, чтобы нить всегда находилась в натянутом состоянии (рис. 8).

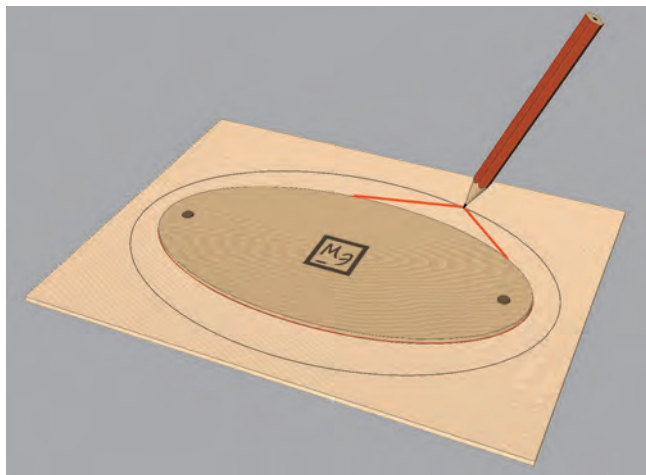


Рис. 8

**Обоснование.** Из рисунка 7 ясно, что  $MF_1 + MF_2$  – величина постоянная, а это соответствует геометрическому определению эллипса. Утверждение о том, что на рисунке 8 траектория грифеля – эллипс, называется теоремой Грейвза. Доказать эту теорему не так просто. Оказывается, траектория грифеля и граница плашки – эллипсы, имеющие общие фокусы.

#### Рисование гиперболы с помощью нити

**Описание конструкций.** В первом способе нить одним концом закреплена в точке, а другим концом – на конце подвижного стержня, вращающегося вокруг другого закрепленного конца. В стержень встроена пружина, прикрепленная к его неподвижному концу. Пружина оттягивает, насколько возможно, нить в сторону неподвижного конца стержня (рис. 9). Можно обойтись и без пружины, оттягивая нить вдоль стержня карандашом.

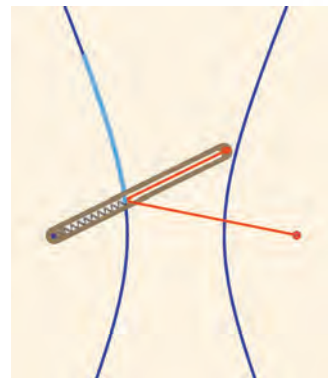


Рис. 9

В другом способе нить, концы которой жестко закреплены в двух точках, проходит через карандаш, за которым одинаковые отрезки нити оттягиваются рукой (рис. 10).

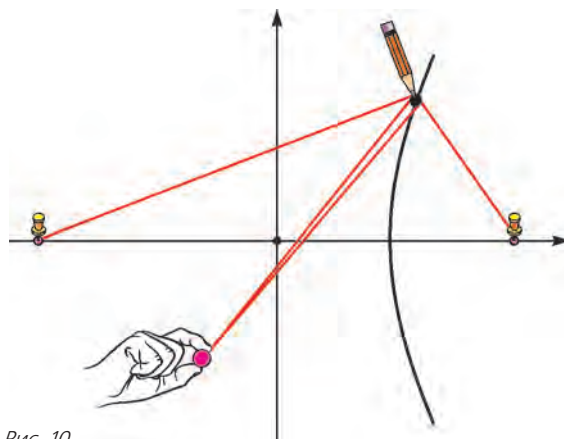


Рис. 10

**Обоснование.** Оба способа реализуют постоянную разность между расстояниями от чертящего инструмента до двух фиксированных точек. Это и есть геометрическое определение гиперболы.

Для инженерных применений были разработаны и сложные механизмы, называемые коникографами. Каждый такой механизм умеет вычерчивать все конические сечения: и параболы, и эллипсы, и гиперболы.

Публикацию подготовили Н. Андреев и Е. Ширяев по материалам проекта «Математические этюды» (<http://etudes.ru>)



# ВП по имени Центр масс

М. БОНДАРОВ

**Р**ЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ, КАК правило, двумя основными способами – динамическим и энергетическим. Вспомните: стоит нам увидеть на рисунке к задаче бруски, нити и блоки, как наша рука тут же начинает старательно чертить стрелочки, изображающие приложенные к телам силы, после чего мы записываем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на выбранные оси. А когда в условии задачи говорится, например, о столкновении тел, та же рука пишет законы сохранения импульса и энергии.

Однако попадают и такие задачи, решить которые можно значительно быстрее, владея еще одним способом решения – методом центра масс. Мало того, иногда случается так, что этот способ является единственно возможным для решения задачи. Правда, при первом знакомстве метод центра масс чем-то напоминает волшебство: уж очень быстро и ловко удается прийти к ответу. Что ж, элементы физического волшебства не возбраняются. Да и заголовок статьи выбран не случайно: в память о волшебной палочке, уникальным изделии ВП, разработанном в лаборатории Алёны Саниной, героини фильма «Чародеи». Однако, в отличие от китежградского прибора наша волшебная палочка не всемогуща: она способна лишь оказывать надежную помощь при решении некоторых задач.

Напомним основные сведения о центре масс – ЦМ. Начнем с определения положения ЦМ. Проще всего это сделать, когда система состоит из двух одинаковых частиц. Тогда очевидно, что их ЦМ находится посередине между ними. Так же легко найти положение ЦМ для симметричной системы, например для однородного стержня. Ясно, что он совпадает с геометрическим центром системы (стержня). А как быть в том случае, когда симметрия нарушена? Пусть, к примеру,

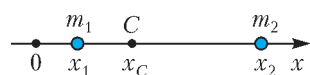


Рис. 1

в системе из двух частиц масса  $m_1$  одной в  $k$  раз больше массы  $m_2$  другой. Тогда разумно предположить, что ЦМ будет ближе к первой частице – ведь ее вклад в общую массу системы больше. А раз она массивнее в  $k$  раз, то и расстояние от нее до ЦМ должно быть в  $k$  раз меньше. Определим теперь координату ЦМ нашей системы – точки  $C$ , обозначив координаты точек массами  $m_1$  и  $m_2$  через  $x_1$  и  $x_2$  соответственно (рис.1):

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2 - x_C}{x_C - x_1}, \text{ и } x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Симметричный вид этой формулы позволяет легко обобщить ее для случая, когда число входящих в систему тел становится больше. Например, если имеется  $n$  точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответственно, то координата ЦМ системы рассчитывается по формуле

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2)$$

Если за малый промежуток времени  $\Delta t$  точки переместятся на  $s_{1x}, s_{2x}, \dots, s_{nx}$ , то из формулы (2) легко определить

перемещение ЦМ системы:

$$s_{Cx} = \frac{m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x} + \dots + m_n s_{nx}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (3)$$

Выражение для проекции на ось  $x$  скорости ЦМ системы получается из формулы (3) делением на  $\Delta t$ :

$$v_{Cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_n v_{nx}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (4)$$

В частности, для системы из двух материальных точек

$$v_{Cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Очевидно, что каждую из записанных выше формул можно использовать для любой другой оси, заменив в ней индекс  $x$  на  $y$  или  $z$ . Таким образом, скорость ЦМ системы частиц может быть представлена в векторном виде:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (6)$$

Заметим, что в числителе правой части этого выражения стоит векторная сумма импульсов частиц, т.е. полный импульс системы частиц  $\vec{p}$ , а в знаменателе – ее полная масса  $M$ . Значит, полный импульс системы частиц равен произведению массы всей системы на скорость ее ЦМ:

$$\vec{p} = M \vec{v}_C. \quad (7)$$

Эта простая формула обладает двумя важными свойствами. Во-первых, она имеет тот же вид, что и для одной частицы. Поэтому ЦМ системы приобретает смысл точки, скорость которой равна скорости движения системы как целого. Во-вторых, с ее помощью закон сохранения импульса может быть сформулирован так:

*В инерциальной системе отсчета ЦМ замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо покоится.*

Ну, а если система не замкнута? Тогда на каждую частицу системы действуют и внутренние и внешние силы. Однако можно показать, что действие внутренних сил не влияет на движение системы как целого и ЦМ системы движется лишь под действием внешних сил. Таким образом, имеется полное совпадение в поведении ЦМ системы и материальной точки той же массы под действием той же силы. Но, как мы знаем, движение материальной точки прекрасно описывается вторым законом Ньютона. Значит, столь же хорошо этот закон может помочь и в описании движения ЦМ.

Пусть за время  $\Delta t$  скорость ЦМ изменилась на  $\Delta \vec{v}_C$  под действием равнодействующей  $\vec{F}$  внешних сил. Тогда изменение импульса системы  $\Delta \vec{p} = M \Delta \vec{v}_C$  связано с действием внешних сил  $\vec{F}$  вторым законом Ньютона:

$$\Delta \vec{p} = F \Delta t. \quad (8)$$

Это выражение можно переписать иначе:

$$\vec{F} = M \frac{\Delta \vec{v}_C}{\Delta t}, \text{ или } \vec{F} = M \vec{a}_C, \quad (9)$$

где  $\vec{a}_C$  – ускорение ЦМ системы. Таким образом, нами получена теорема о движении ЦМ, которую иногда называют вторым законом Ньютона для системы материальных точек; она содержит главную информацию, необходимую для описания движения системы:

*В инерциальной системе отсчета центр масс системы материальных точек движется так, будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.*

В зависимости от условия задачи ЦМ системы может оставаться неподвижным, но может и двигаться различным



образом. Рассмотрим эти его возможности на примерах решения конкретных задач.

**Неподвижный ЦМ**

**Задача 1.** Тележка длиной  $l = 5$  м стоит на гладких рельсах. На противоположных концах тележки стоят два мальчика. Масса тележки  $M = 75$  кг, массы мальчиков  $m_1 = 45$  кг и  $m_2 = 30$  кг. Мальчики меняются местами. На какое расстояние  $\Delta l$  переместится при этом тележка?

**Решение.** Действия внешних сил на систему, состоящую из тележки и мальчиков, скомпенсированы, поэтому ее ЦМ при движении тел не изменит своего положения. Направим ось  $x$  горизонтально и выберем за начало координат (точка 0) центр масс тележки (точка  $M$ ), совпадающий с ее геометрическим центром (рис.2). Определим по формуле (1)

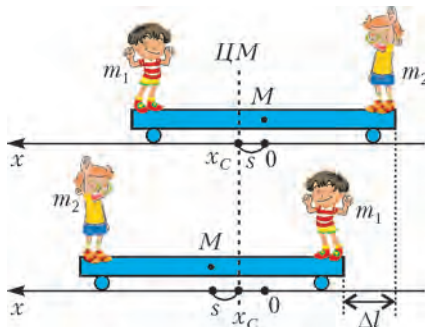


Рис. 2

координату ЦМ системы до начала движения:

$$x_C = \frac{m_1 l/2 - m_2 l/2}{M + m_1 + m_2} = \frac{l}{2} \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}.$$

Таким образом, центр тележки  $M$  в начальный момент находится справа от ЦМ системы на расстоянии  $s$ , равном  $x_C$ . После того, как мальчики поменяются местами, точка  $M$  окажется слева от ЦМ на таком же расстоянии. Следовательно, искомое перемещение тележки вдвое больше  $s$ :

$$\Delta l = 2x_C = l \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} = 0,5 \text{ м}.$$

Прийти к тому же ответу можно было, используя более формальный подход. Для этого следовало найти проекции на ось  $x$  перемещений тел массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3 = M$ , а затем использовать формулу (3) перемещения ЦМ с учетом того, что оно в данном случае равно нулю:

$$s_{Cx} = \frac{-m_1(l - \Delta l) + m_2(l + \Delta l) + M\Delta l}{m_1 + m_2 + M} = 0.$$

Отсюда сразу получим тот же ответ, что и при первом способе решения.

**Неподвижность координаты ЦМ относительно какой-либо оси**

**Задача 2** (МФТИ, 2004). Брусок в форме прямоугольного параллелепипеда находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.3). На бруске укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов  $r$  и  $R = 3r$  и вертикальная штанга  $AC$ . На шкивы намотаны легкие нити, прикрепленные к грузам массами  $t$  и  $4t$ . Масса бруска  $2t$ . Груз массой  $t$  может скользить вдоль штанги  $AC$ . Вначале груз массой  $4t$  удерживали в покое. При этом груз массой  $t$  находился на расстоянии  $H = 14$  см

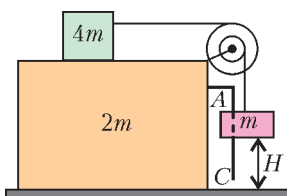


Рис. 3

от стола. Затем грузы отпустили. Брусок и грузы стали двигаться поступательно, их скорости оказались в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится брусок к моменту удара груза массой  $t$  о стол? При ударе другой груз не достигает блока. Массами блока и штанги пренебречь.

**Решение.** Это практически та же задача, что и предыдущая. Посмотрим, в чем состоят небольшие изменения и как они влияют на ход решения. 1) Тележку заменили на брусок, мальчиков – на грузы. При этом грузы, конечно, перестали иметь возможность двигаться за счет отталкивания от бруска, но внутренние силы, как мы знаем, не влияют на движение системы как целого. 2) Груз массой  $t$  может двигаться по вертикали, а по горизонтали он «привязан» к бруску: их перемещения в этом направлении одинаковы. Движение по вертикали не влияет на изменение горизонтальной координаты груза. 3) Наличие ступенчатого блока в условии лишь немного осложняет расчеты: нужно учесть, что пока груз массой  $t$  опустится по вертикали на  $H$ , груз массой  $4t$  проедет относительно бруска втрое большее расстояние  $3H$ . Важно, что главная физическая суть задачи осталась той же: в горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, поэтому координата  $x$  ЦМ системы останется неизменной. А дальше поступим так же, как в задаче 1.

Направим ось  $x$  влево и найдем перемещения тел за время их движения: брусок вместе с грузом массой  $t$  сместятся влево на  $\Delta l$ , а груз массой  $4t$  – вправо на  $3H - \Delta l$ . Приравняем к нулю перемещение ЦМ системы:

$$s_{Cx} = \frac{-4t(3H - \Delta l) + 2m\Delta l + m\Delta l}{4m + 2m + m} = 0.$$

Отсюда получим ответ: брусок сместится влево на расстояние

$$\Delta l = \frac{12}{7} H = 24 \text{ см}.$$

**Задача 3** (МФТИ, 1999). Тележка может двигаться прямолинейно, поступательно, без трения по горизонтальной поверхности стола. К тележке прикреплена горизонтальная ось  $O$ , перпендикулярная возможному направлению движения тележки (рис.4). Вокруг оси  $O$  в плоскости, перпендикулярной ей, может вращаться без трения на стержне длиной  $L$  небольшой по размерам шарик массой  $t$ . Масса тележки, оси  $O$  и ее крепления равна  $4t$ . Массами стержня и колес тележки пренебречь. Вначале тележка покоилась, а стержень удерживали под углом  $\beta$  к вертикали. Затем стержень отпустили.

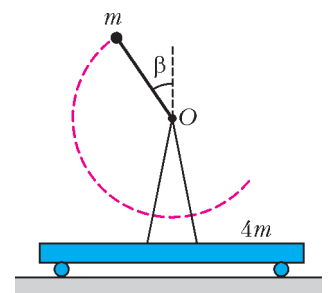


Рис. 4

1) Найдите скорость и тележки при прохождении шариком нижней точки своей траектории.

2) Найдите амплитуду  $A$  колебаний тележки, т.е. половину расстояния между наиболее удаленными друг от друга положениями тележки.

**Решение.** Это еще одна во многом похожая на предыдущие задача. Заметим однако, что в ней имеется два вопроса, причем наша ВП работает, главным образом, при ответе на второй из них. Но начнем все же с первого вопроса.

Снова горизонтальное направление выделено тем, что вдоль него внешние силы не действуют, а значит, импульс системы в этом направлении остается в любой момент

времени таким же, каким был вначале: равным нулю. Скорость шарика  $v$  направлена в нижней точке вправо, тележка при этом движется влево со скоростью  $u$ . По закону сохранения импульса,

$$0 = mv - 4mu.$$

Так как трение в системе отсутствует, то, по закону сохранения механической энергии,

$$mgL(1 + \cos\beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{4mu^2}{2}.$$

Решая совместно систему двух уравнений, определим искомую скорость тележки:

$$u = \sqrt{\frac{gL(1 + \cos\beta)}{10}}.$$

При ответе на второй вопрос иногда допускают ошибку, неверно полагая, что в начальный момент времени шарик находится в крайнем левом положении, а тележка – в крайнем правом. На это предположение наталкивает казалось бы разумная аналогия с первой задачей. Допустим, что в задаче 1 по тележке движется только первый мальчик, который стоит слева; второй мальчик при этом остается неподвижным относительно тележки. Заметим, что первый мальчик все время от начала движения перемещается вправо, пока не дойдет до противоположного края тележки. А при движении шарика изменение его горизонтальной координаты происходит иначе: сначала он смещается влево, пока стержень не примет горизонтальное положение, и лишь затем начинает смещаться вправо. Именно в тот момент, когда стержень горизонтален, тележка максимально смещена вправо. Таким образом, в то время как тележка смещается в одну сторону от ЦМ системы на  $A$ , шарик по горизонтали смещается в другую на  $L - A$ . Тогда, по формуле (3),

$$m(L - A) - 4mA = 0,$$

откуда находим амплитуду колебаний тележки:

$$A = \frac{L}{5}.$$

**Задача 4.** На концах и в середине невесомого вертикального стержня длиной  $l$  укреплены одинаковые шарик

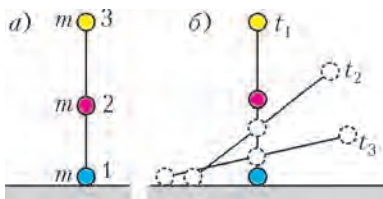


Рис. 5

массой  $m$  каждый (рис. 5, а). Какую скорость будут иметь шарик в момент падения на горизонтальный стол, если нижний шарик не закреплен? Трение между столом и нижним шариком отсутствует.

**Решение.** Обсудим сначала, что нам достоверно известно о движении каждого шарика (рис. 5, б).

Нижний шарик будет двигаться по столу, его ускорение определяется проекцией на горизонтальную ось силы упругости, действующей на него со стороны стержня. Очевидно, что движение первого шарика будет происходить с переменным ускорением, поскольку меняются величина и направление этой силы. А вот движение среднего шарика даст нам более ценную информацию. Согласно теореме о движении ЦМ, средний шарик обязан двигаться по вертикали – ведь этот шарик удачно расположился в ЦМ системы. В момент падения средний шарик почти касается поверхности стола, нижний шарик останавливается, а верхний движется по вертикали со скоростью, вдвое большей скорости  $v$  среднего шарика. По закону сохранения энер-

гии,

$$mgl + mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2},$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{3}{5}gl}.$$

Теперь можно записать окончательный ответ:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v = \sqrt{\frac{3}{5}gl}, \quad v_3 = 2v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl}.$$

### Равномерное движение ЦМ

Если действие внешних сил на систему скомпенсировано, то ее ЦМ не обязательно покоится. Он может двигаться равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с землей (эту систему отсчета часто называют лабораторной – ЛСО). В таких случаях полезно рассмотреть упрощенный вид движения в системе отсчета центра масс – СЦМ. Упрощение достигается, главным образом, за счет того, что в СЦМ два взаимодействующих тела имеют одинаковые по модулю и противоположно направленные векторы импульсов. При взаимодействии тела изменяют свои импульсы так, что их модули по-прежнему оказываются равными друг другу. В самом конце решения для получения верного ответа нужно только не забыть вернуться в исходную систему отсчета.

**Задача 5** (ЕГЭ). Снаряд массой  $m = 4$  кг, летящий со скоростью  $v = 400$  м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на величину  $\Delta E = 0,5$  МДж. Определите скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда.

**Решение.** В СЦМ снаряд в момент разрыва покоится, поэтому после разрыва осколки одинаковой массы  $m/2$  полетят в противоположные стороны с равными по модулю скоростями  $u$ , причем их суммарная кинетическая энергия будет равна  $2(m/2)u^2/2 = \Delta E$ . Отсюда находим скорость каждого осколка в СЦМ:

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 500 \text{ м/с}.$$

Возвратившись в систему отсчета, связанную с землей, определим скорость первого осколка:

$$u_1 = v + u = v + \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 900 \text{ м/с}.$$

**Задача 6** (МФТИ, 2000). Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. В начальный момент муфта массой  $m$  с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью  $k$  движется со скоростью  $v_0$ , а муфта массой  $4m$  покоится (рис. 6).

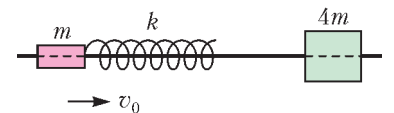


Рис. 6

Определите скорость муфты массой  $4m$  после ее отрыва от пружины и время контакта этой муфты с пружиной. Размеры муфт много меньше длины пружины.

**Решение.** Вновь имеем дело с компенсацией внешних сил, действующих на систему. Следовательно, ЦМ движется относительно земли с постоянной скоростью. Определяем эту скорость по формуле (5):

$$v_C = \frac{mv_0}{m + 4m} = \frac{v_0}{5}.$$

С такой же по модулю скоростью в СЦМ движется влево муфта массой  $4m$  до столкновения с пружиной. После отскока от нее муфта движется вправо со скоростью  $v_0/5$ . Перейдя в СО, связанную с землей, определим искомую скорость муфты после ее отрыва от пружины:

$$v_2 = \frac{2v_0}{5}.$$

Для определения времени контакта правой муфты с пружиной заметим, что ЦМ – это единственная точка системы, которая неподвижна в СЦМ. Следовательно, движение каждой муфты аналогично колебательному движению груза, прикрепленного к горизонтальной пружине, другой конец которой неподвижен (можно считать, что он закреплен в ЦМ системы). Тогда получается, что правая муфта оказывается прикрепленной к той части пружины, длина которой в 5 раз меньше ее полной длины. Поэтому правая муфта будет колебаться под действием пружины жесткостью  $5k$ . Время контакта пружины и муфты равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{4m}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

**Абсолютно упругий удар**

**Задача 7.** Два шара одинаковых радиусов движутся по гладкой горизонтальной поверхности (рис.7). Массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости  $v_1$  и  $v_2$  направлены по линии центров шаров. Определите скорости шаров после их абсолютно упругого удара.

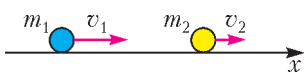


Рис. 7

и  $v_2$  направлены по линии центров шаров. Определите скорости шаров после их абсолютно упругого удара.

**Решение.** В системе отсчета, связанной с землей, абсолютное упругое столкновение тел обычно исследуется с помощью законов сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} m_1v_{1x} + m_2v_{2x} &= m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x}, \\ \frac{m_1v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2v_{2x}^2}{2} &= \frac{m_1v'^2_{1x}}{2} + \frac{m_2v'^2_{2x}}{2}. \end{aligned}$$

Мы же снова будем решать задачу, используя переход в СЦМ. Причем в нашем случае индекс  $x$  всюду можно будет опустить. Определим сначала скорость ЦМ системы по формуле (5):

$$v_C = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Тогда скорость первого шара в СЦМ равна

$$u_1 = v_1 - v_C = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Мы знаем, что в СЦМ полный импульс системы равен нулю, поэтому шары движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю импульсами  $p$ . Что же будет после их лобового столкновения? Понятно, что шары станут удаляться друг от друга, и снова модули их импульсов  $p'$  окажутся равными. Причем закон сохранения энергии запрещает все другие возможности, кроме  $p = p'$ . Поэтому при абсолютно упругом лобовом столкновении двух тел в СЦМ они меняют только направление своих скоростей на противоположные; модули скоростей у каждого из тел при этом остаются прежними.

Итак, мы выяснили, что скорость первого шара после соударения в СЦМ будет равна

$$u'_1 = -u_1 = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}.$$

Чтобы найти конечную скорость первого шара в ЛСО, нужно

к этой скорости прибавить скорость ЦМ системы:

$$v'_1 = u'_1 + v_C = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}.$$

Конечную скорость  $v'_2$  второго шара определим, используя замену  $m_1 \rightarrow m_2$  и  $m_2 \rightarrow m_1$ , основанную на симметрии условия:

$$v'_2 = u'_2 + v_C = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 8 (ЕГЭ).** Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях (рис.8). Легкий шарик отклоняют на угол  $90^\circ$  и отпускают без начальной скорости. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?

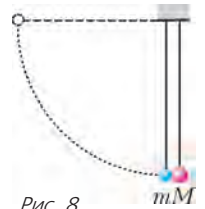


Рис. 8

**Решение.** В подобных случаях решение обычно разбивают на два этапа: 1) движение первого шарика до столкновения со вторым; 2) процесс соударения шариков.

Начнем с рассмотрения второго этапа. Определим сначала скорость ЦМ:

$$v_C = \frac{mv}{m + 3m} = \frac{v}{4}.$$

Значит, в СЦМ легкий шарик движется перед ударом вправо со скоростью  $3v/4$ , а тяжелый движется влево со скоростью  $v/4$ . После удара их скорости в СЦМ изменяют направление на противоположные, не изменив при этом своего модуля. (Рекомендуем читателям сделать поясняющие рисунки.) Вернемся теперь в СО, связанную с землей. В ней после соударения скорость легкого шарика равна по модулю  $v/2$  и направлена влево, а скорость тяжелого также равна  $v/2$ , но направлена вправо. Следовательно, искомое отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков после удара равно отношению их масс, т.е. трем.

Итак, мы смогли получить верный ответ в задаче, даже не приступив к первому этапу решения. Иными словами, данные об отклонении нити с легким шариком на  $90^\circ$  нам не пришлось использовать, они оказались лишними. К такому же ответу мы пришли бы при любом другом угле отклонения!

**Задача 9.** В момент наибольшего сближения частиц при упругом лобовом столкновении их скорости одинаковы и равны  $v$ . Каковы скорости частиц после разлета, если до столкновения они двигались со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ ?

**Решение.** В момент наибольшего сближения относительная скорость частиц равна нулю, а в ЛСО они движутся в этот момент со скоростью ЦМ. Таким образом, скорость ЦМ нам известна из условия задачи. Перейдем теперь в СЦМ. До столкновения скорости частиц в ней равны  $v_1 - v$  и  $v_2 - v$ . Мы уже знаем, что в результате лобового удара скорости частиц просто меняют свой направления на противоположные, а их модули остаются прежними. Следовательно, после удара скорости частиц равны  $v - v_1$  и  $v - v_2$ . Остается лишь вернуться в ЛСО. Для этого прибавим к каждой из скоростей, найденных в СЦМ, скорость самого ЦМ, т.е.  $v$ . В результате имеем

$$v'_1 = 2v - v_1 \text{ и } v'_2 = 2v - v_2.$$

На примере этой задачи прекрасно видна работа нашей ВП! Для сравнения предлагаем читателям самостоятельно решить эту задачу с помощью законов сохранения импульса и энергии.





Рис. 9

**Задача 10.** На гладком столе лежит пробирка длиной  $L$  и массой  $M$  (рис.9). Шарик массой  $m$  влетает в

пробирку, упруго соударяется с дном и вылетает из пробирки. Найдите путь, который пройдет пробирка к моменту вылета из нее шарика.

**Решение.** Пусть шарик влетает в пробирку со скоростью  $v_0$ . Для определения пройденного пробиркой пути нужно знать ее скорость  $v'_2$  после столкновения и время движения  $t$ , пока шарик находится внутри нее. Обе величины легко находятся, если использовать СЦМ, движущуюся со скоростью  $v_C = \frac{mv_0}{M+m}$  относительно земли. В этой системе отсчета относительная скорость шарика и пробирки не меняется при столкновении, оставаясь равной  $v_0$ . Следовательно, шарик вылетит из пробирки через время  $t = L/v_0$  после соударения с ней. За это время пробирка пройдет в ЛСО путь  $l = v'_2 t$ , где

$$v'_2 = u'_2 + v_C = \frac{mv_0}{M+m} + \frac{mv_0}{M+m} = \frac{2mv_0}{M+m}$$

– скорость пробирки относительно земли. Таким образом, пройденный пробиркой путь равен

$$l = v'_2 t = \frac{2m}{M+m} L.$$

**Задача 11** (МФТИ, 1985). Протон, пролетая мимо первоначально покоящегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 4/15$ ), потеряв 10% своей скорости (рис. 10). Найдите массовое число химического элемента.

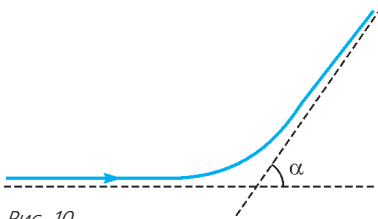


Рис. 10

го элемента, отклонился на угол  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 4/15$ ), потеряв 10% своей скорости (рис. 10). Найдите массовое число химического элемента.

**Решение.** В данном случае происходит не лобовое столкновение частиц. Обозначим массу ядра  $M$ , а массу протона  $m$ . Проанализируем процесс столкновения в СЦМ. Ядро движется в ней со скоростью ЦМ:

$$u_2 = v_C = \frac{mv}{M+m},$$

протон движется навстречу ядру со скоростью

$$u_1 = v - v_C = \frac{Mv}{M+m}.$$

После столкновения частиц их импульсы поворачиваются, оставаясь равными по модулю и противоположными по направлению. Другими словами, и протон и ядро сохраняют модули своих скоростей при ударе, изменив на одинаковые углы направления векторов скоростей. Это схематически показано на рисунке 11, где  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  – скорости протона и ядра до удара,  $\vec{u}'_1, \vec{u}'_2$  – их скорости после удара. Теперь на рисунке 12 изобразим взаимное расположение векторов конечных скоростей протона в ЛСО и в СЦМ. Для них выпол-

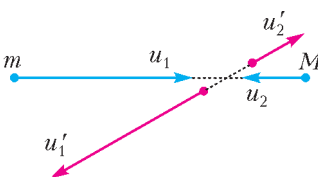


Рис. 11

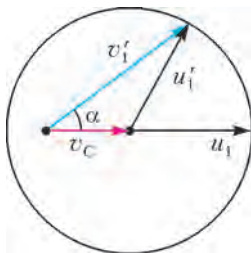


Рис. 12

няется закон сложения скоростей:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_C + \vec{u}'_1.$$

По теореме косинусов (в которой мы учли, что  $u'_1 = u_1$ ),

$$u_1^2 = v_C^2 + v_1'^2 - 2v_C v_1' \cos \alpha,$$

или

$$\left(\frac{Mv}{M+m}\right)^2 = \left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 + (0,9v)^2 - 2\frac{mv}{M+m} \cdot 0,9v \cdot \frac{4}{15}.$$

Введя замену  $n = M/m$ , преобразуем это выражение и получим квадратное уравнение

$$0,19n^2 - 1,14n - 1,33 = 0.$$

Отсюда находим, что  $n = 7$ . Таким образом, протон столкнулся с ядром лития.

Представим себе теперь обратную ситуацию – пусть ядро лития налетает на неподвижный протон. Что принципиально изменится в физической картине, описывающей соударение частиц? Когда было неподвижно ядро лития, налетающий протон мог отклониться на любой угол, вплоть до  $180^\circ$ . Теперь же налетает более тяжелая частица на неподвижную легкую, значит, отклониться от первоначального направления она может уже не на любой угол. Величина угла ограничена отношением масс взаимодействующих частиц. Попробуем решить задачу в общем виде.

**Задача 12.** Каким может быть максимальный угол рассеяния налетающей частицы массой  $M$  при абсолютно упругом столкновении с покоящейся частицей массой  $m < M$ ?

**Решение.** Закономерности столкновения остаются в СЦМ теми же, что и в предыдущей задаче. Однако теперь другое соотношение между модулями скорости  $u_1$  налетающей частицы и скорости  $v_C$  ЦМ:

$u_1 < v_C$ . Поэтому геометрически картина выглядит иначе (рис.13). Из рисунка видно, что конец вектора  $\vec{v}'_1$  перемещается по окружности радиусом  $u_1$  с центром в конце вектора  $\vec{v}_C$ . Максимальный угол  $\alpha_{\max}$  между векторами  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}_C$  соответствует касательной к окружности, при этом

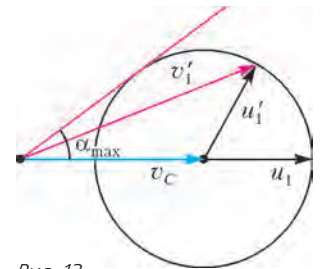


Рис. 13

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{u'_1}{v_C} = \frac{u_1}{v_C} = \frac{m}{M}.$$

Для ядра лития и протона отношение масс равно  $m/M = 1/7$ , поэтому

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{1}{7} \approx 8^\circ.$$

Таким образом, ядро лития после соударения с неподвижным протоном не сможет отклониться от первоначального направления движения более чем на  $8^\circ$ .

**ЦМ движется равноускоренно**

**Задача 13** (МФТИ, 1985, олимпиада). С поверхности земли бросили вертикально вверх кусочек пластилина со скоростью  $v_0$ . Одновременно такой же кусочек пластилина начал падать без начальной скорости с высоты  $H$ . При столкновении кусочки слиплись. Через какое время  $t$  после начала бросания и с какой скоростью  $v$  слипшийся комок упадет на землю?

**Решение.** Если пытаться идти традиционным путем, рассматривая движение тел относительно земли, то решение задачи оказывается сопряженным с большими трудностями.

Действительно, в этом случае нужно записать уравнения движения тел до столкновения, закон сохранения импульса при столкновении и уравнение движения слипшегося куска. Ясно, что прийти к ответу быстро не получится. Зато наша ВП может работать на всю мощь! Смотрите, как легко решается задача, если пользоваться понятием ЦМ системы.

Очевидно, что в начальный момент ЦМ системы находится на высоте  $H_{C0} = H/2$ , а его скорость направлена вверх и равна  $v_{C0} = v_0/2$ . На систему действует только одна внешняя сила – сила тяжести. Поэтому ЦМ движется с ускорением, модуль которого равен  $g$ . Тогда конечная скорость ЦМ, а значит и комка в целом, может быть найдена с помощью кинематической формулы в одну строчку:

$$v = \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + 2g \frac{H}{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{4} + gH}.$$

Так же просто определяем время движения, используя формулу перемещения при равноускоренном движении:

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_0}{2}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Преобразовав ее к квадратному уравнению, находим

$$t = \frac{1}{2g} \left( v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH} \right).$$

**Задача 14.** Два небольших шарика, массы и заряды которых одинаковы, находятся на одной вертикали на высотах  $h_1$  и  $h_2$ . Шарики бросают в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями  $v$ . Первый шарик касается земли на расстоянии  $L$  от вертикали бросания. На какой высоте  $H_2$  в этот момент находится второй шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.

**Решение.** Попытки решать эту задачу «в лоб», скорее всего, едва ли достигнут успеха. Действительно, вдобавок к постоянной по направлению и величине силе тяжести на каждый шарик действует еще очень неприятная кулоновская сила. Неприятная в том смысле, что она меняется обратно пропорционально квадрату расстояния между шариками, а значит, их движение будет происходить с переменным ускорением. А вот используя теорему о движении ЦМ, мы достаточно быстро приходим к верному ответу.

Итак, ЦМ системы в начальный момент находится на высоте  $h_C = (h_1 + h_2)/2$  и имеет начальную скорость  $v$ . На систему действует только одна внешняя сила – сила тяжести, поэтому ЦМ будет двигаться по параболе (рис. 14). При этом время движения легко найти, зная, что при равномерном движении по оси  $x$  ЦМ пройдет расстояние  $L = vt$ , а высота ЦМ в момент падения будет равна

$$H_C = h_C - \frac{gt^2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{gL^2}{2v^2}.$$

Теперь уже совсем просто найти высоту  $H_2$  второго шарика:

$$H_2 = 2H_C = h_1 + h_2 - \frac{gL^2}{v^2}.$$

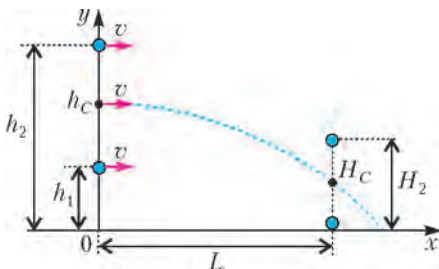


Рис. 14

**ЦМ движется по окружности**

**Задача 15** (МФТИ, 2014). Тонкая изогнутая трубка с одним горизонтальным коленом и двумя вертикальными коленами укрепена на платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис. 16). Вертикальные колена находятся на расстояниях  $x_1 = 15$  см и  $x_2 = 25$  см от оси вращения. Установившаяся разность уровней налитой в трубку воды оказалась равной  $\Delta h = 10$  см. Найдите угловую скорость  $\omega$  вращения платформы.

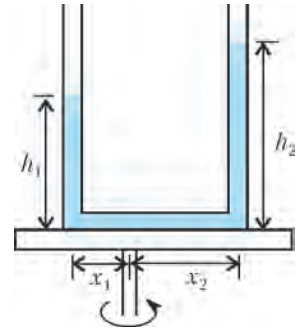


Рис. 15

**Решение.** Рассмотрим движение воды, заполняющей горизонтальное колено трубки. Ее масса равна  $m = \rho S(x_1 + x_2)$ , где  $\rho$  – плотность воды,  $S$  – площадь сечения горизонтального колена. ЦМ этого цилиндра движется по окружности радиусом  $\frac{x_2 - x_1}{2}$  с ускорением  $a = \omega^2 \frac{x_2 - x_1}{2}$ . Со стороны окружающей жидкости на торцы цилиндра действуют в горизонтальном направлении силы, равные  $p_1 S$  и  $p_2 S$ , где  $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ ,  $p_2 = p_0 + \rho g h_2$  и  $p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$ . Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона:  $ma = p_2 S - p_1 S$ . Отсюда находим угловую скорость вращения платформы:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{x_2^2 - x_1^2}}.$$

**Упражнения**

1. Человек захотел спуститься по веревочной лестнице из свободно висящего аэростата массой 400 кг. Какой минимальной длины веревочную лестницу он должен привязать к гондole аэростата, чтобы, ступая на последнюю ступеньку, коснуться земли? Масса человека 80 кг. Расстояние от земли до аэростата в начальный момент времени 10 м.

2. На гладком горизонтальном столе лежат один за другим три шара одного и того же радиуса, не касаясь друг друга: первый массой  $2m$ , второй массой  $m$  и третий массой  $m/2$ . Первому шару сообщают скорость  $v_0 = 9$  м/с, направленную по прямой, проходящей через центры всех трех шаров. Первый шар налетает на второй, а второй налетает на третий. Найдите скорость третьего шара после удара со вторым шаром. Все удары – абсолютно упругие.

3. На концах и в середине невесомого жесткого вертикального стержня длиной  $L$  укреплены маленькие шарики 1, 2, 3 равного объема, массы которых  $m$ ,  $2m$  и  $3m$ , а заряды  $+3q$ ,  $+2q$ ,  $+q$  соответственно (рис. 16). В пространстве, где находятся шарики, создано однородное электрическое поле напряженностью  $E$ , силовые линии которого направлены вертикально вниз. Какую скорость будет иметь второй шарик в момент падения на горизонтальную поверхность? Силами трения и влиянием индуцированных на горизонтальной поверхности зарядов пренебречь.

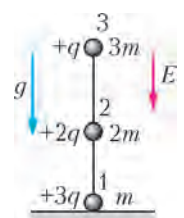


Рис. 16

4. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какую траекторию будут описывать жук и центр обруча, если жук начнет двигаться вдоль обруча? Масса обруча  $M$ , его радиус  $R$ , масса жука  $m$ .

5. Тонкий однородный стержень массой 0,5 кг и длиной 1 м вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В нижнем положении скорость другого конца стержня равна 4 м/с. С какой силой действует стержень в этот момент на ось вращения?

# «Математическая составляющая»

Лауреатом престижной премии «Просветитель» 2015 года за лучшую научно-популярную книгу на русском языке в номинации «Естественные и точные науки» стала книга «Математическая составляющая»<sup>1</sup>. Редакторы-составители книги Н.Н.Андреев, С.П.Коновалов, Н.М.Панюнин; художник-оформитель Р.А.Кокшаров. Двое из этого коллектива – члены редколлегии нашего журнала.

«Математическая составляющая» – это сборник небольших научно-популярных статей, написанных известными учеными. Книга состоит из трех частей. В первой («синей») части собраны сюжеты, показывающие жизненную необходимость математических открытий и исследований для человечества. Вторая («зеленая») часть – о проявлениях математики в обычных явлениях и вещах. Третья («красная») часть также посвящена прикладным вопросам, но адресована читателю с более серьезной математической подготовкой.

Увлекательный стиль изложения и красочные иллюстрации делают книгу доступной для широкого круга читателей, в том числе и для школьников.

Ниже мы приводим расширенный вариант одной из статей из сборника «Математическая составляющая».

## Спутниковая навигация

*Н. ПАНЮНИН*

**П**РЕДСТАВЛЕНИЕ О ТОМ, ЧТО ВАШ GPS- ИЛИ ГЛОНАСС-приемник получает ваши же координаты от находящихся на орбите спутников, – ошибочно. Во-первых, спутники их просто не знают, во-вторых, свои сообщения спутники отправляют «в пространство», сразу всем, а не только вашему приемнику. Как же навигатор определяет ваши координаты?

В спутниковой навигационной системе можно выделить два основных сегмента: космический и управленческий. Космический сегмент – созвездие спутников, равномерно расположенных вокруг Земли. Управленческий сегмент, находящийся на Земле, обеспечивает, в частности, синхронизацию на всех спутниках «общесистемного» времени и корректировку орбит спутников.

Каждый спутник постоянно передает навигационные сообщения, содержащие, в частности, координаты спутника в момент отправки сообщения и время отправки. Приемник, получивший такое сообщение, может рассчитать расстояние до спутника:  $d = (t^{(пр)} - t^{(отпр)})c$ . В этой формуле время прохождения сигнала (от времени отправки  $t^{(отпр)}$  до времени приема  $t^{(пр)}$ ) умножается на скорость распространения радиосигнала, т. е. скорость света  $c$ . С другой стороны, если в прямоугольной декартовой системе координат координаты приемника равны  $(x; y; z)$ , а координаты спутника в момент



отправки сообщения были равны  $(x_1; y_1; z_1)$ , то квадрат этого же расстояния  $d$  равен  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ .

Геометрически это означает, что сообщение от одного спутника выделяет часть пространства, в которой вы находитесь, – сферу с центром в спутнике. Информация еще от одного спутника – вторая сфера. Пересечение этих двух сфер, вообще говоря, – окружность. Сообщение от третьего спутника добавляет еще одно ограничение – третью сферу. Вообще говоря, пересечение трех сфер – две точки (рис. 1). Выбрать из них ту, которая соответствует местоположению приемника, можно, например, воспользовавшись информа-

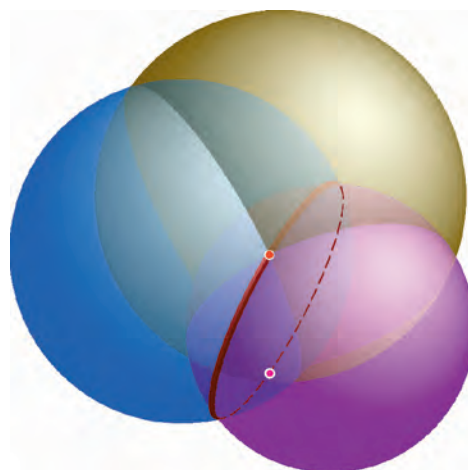


Рис. 1

<sup>1</sup> Книга издана по решению Ученого совета Математического института имени В.А.Стеклова Российской академии наук фондом «Математические этюды». Подробная информация о книге находится на сайте <http://www.etudes.ru/>



цией от четвертого спутника или при помощи априорного знания приблизительных координат приемника.

Таким образом, приемник, получивший сообщения от трех спутников, сможет найти свои координаты  $(x; y; z)$ , решив систему из трех уравнений

$$(*) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2, \end{cases}$$

где  $(x_i; y_i; z_i)$  – координаты  $i$ -го спутника, а  $d_i$  – расстояние до него. То, что система  $(*)$  имеет решение, т.е. три сферы пересекаются, следует из самого ее составления.

Современные спутниковые системы умеют определять местоположение с точностью 10–15 метров. Представим, однако, что часы приемника отстают от общесистемного времени на 0,001 с. Скорость света равна  $c = 300000$  км/с, таким образом, в определении расстояний до спутников (радиусов сфер) получится ошибка в 300 км! Как преодолеть эту проблему?

Пусть часы приемника отстают от общесистемного времени на (неизвестную нам) величину  $\delta$ , а их показания в момент получения сообщения –  $t^{(np)}$ . Навигатор будет «считать», что расстояние до спутника равно  $d = (t^{(np)} - t^{(отпр)})c$ , что меньше истинного расстояния  $d + \delta c$ .

Чтобы найти координаты  $(x; y; z)$  и новую неизвестную  $\delta$ , необходимо еще одно уравнение, оно появится, если есть данные от четырех спутников:

$$(**) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (d_1 + \delta c)^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (d_2 + \delta c)^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = (d_3 + \delta c)^2, \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = (d_4 + \delta c)^2. \end{cases}$$

Приемник решает эту систему алгебраическими методами и сообщает вам ваши координаты  $(x; y; z)$ , а кроме того, корректирует свои часы на поправку во времени  $\delta$  и сообщает вам общесистемное (точное!) время.

Геометрическая интерпретация системы  $(**)$  такова. Приемник является центром сферы радиуса  $r = \delta c$ , которая касается четырех данных сфер радиусов  $d_i$ , центры которых – спутники.

Сфера, касающаяся четырех данных, существует, это было впервые доказано Пьером Ферма. Эта задача аналогична известной задаче Аполлония на плоскости: построить окружность, касающуюся трех данных. Всего существует не более шестнадцати различных вариантов взаимного расположения сфер: искомая сфера может касаться каждой из четырех данных либо внешним, либо внутренним образом.

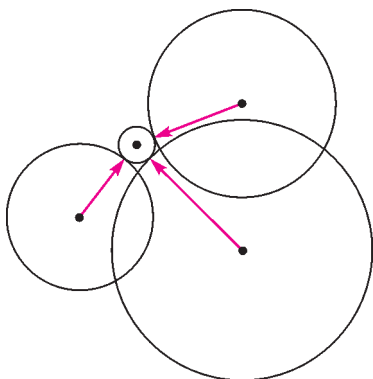


Рис. 2

На рисунке 2 изображен двумерный вариант этой задачи: окружность внешним образом касается трех данных окружностей. В нашем случае, поскольку часы отставали, касание будет внешним. Если бы часы убежали вперед, то касание было бы внутренним.

Иная геометрическая интерпретация возникает, если в системе  $(**)$  избавиться от неизвестной  $\delta$ . Для этого в каждом из уравнений извлечем квадратный корень из обеих частей, а затем вычтем четвертое уравнение из каждого из первых трех. Получится система

$$(***) \quad \begin{cases} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \\ - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2} = d_1 - d_4, \\ \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} - \\ - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2} = d_2 - d_4, \\ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2} - \\ - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2} = d_3 - d_4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы  $(***)$  определяет геометрическое место точек, разность расстояний от которых до первого спутника и до четвертого спутника постоянна и равна  $d_1 - d_4$ . По определению это двуполостный гиперболоид. Его фокусами являются 1-й и 4-й спутники. Второе и третье уравнения определяют еще два гиперболоида. Приемник находится в пересечении трех гиперболоидов. В двумерном случае это соответствует пересечению двух гипербол (рис. 3).

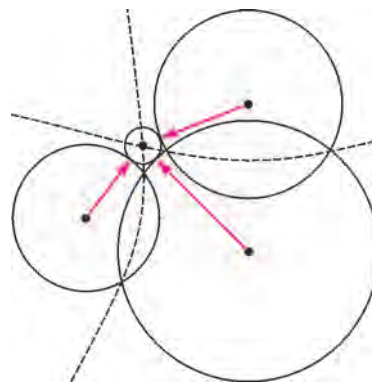


Рис. 3

Спутниковые навигационные системы, позволяющие определять местоположение, принадлежат к числу чрезвычайно высокотехнологичных. В них соединяются последние достижения науки и техники. При расчетах учитывают множество факторов: влияние Луны, влияние приливов, несферичность Земли, влияние ионосферы на распространение сигнала от спутника, солнечный ветер, эффекты теории относительности, неточности в атомных часах, магнитное поле Земли и т.д. Математический аппарат, обеспечивающий расчеты, очень разнообразен – математический анализ, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория возмущений, гармонический анализ, теория приближений. Но, как мы видели, математическая идея, на которой основано собственно вычисление местоположения, довольно проста и не выходит за рамки школьного курса геометрии.

# Заключительный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап XLI Всероссийской математической олимпиады школьников проводился с 23 по 29 апреля 2015 года в столице Татарстана городе Казани.

В олимпиаде приняли участие 355 школьников из 50 регионов России, показавших наиболее высокие результаты на региональном этапе. В олимпиаде приняли участие традиционные гости: команды из Болгарии и Китайской Народной Республики.

Как и в предыдущие годы, в каждый из двух дней олимпиады участникам было предложено по 4 задачи на 5 часов работы. Несмотря на то, что задачи олимпиады были достаточно трудными, школьники успешно справились с ними. И в каждом классе нашлись участники, решившие все 8 задач. По традиции, после олимпиады школьники участвовали в голосовании, на котором они выбрали наиболее красивые, по их мнению, задачи. Лауреатами в этом соревновании стали: в 9 классе – задачи 6 (I место), 8 (II место) и 7 (III место); в 10 классе – 7 (I место; отметим, что еще в прошлом году ее автор Максим Дидин был победителем Всероссийской, а затем и Международной олимпиады школьников), 3 (II место) и 8 (III место); в 11 классе – 4 (I место), 6 (II место) и 3 (III место). Большая часть этих задач включена в «Задачник «Кванта» этого номера.

Стоит отметить высокий уровень организации олимпиады, благодаря которому она превратилась в настоящий праздник для лучших юных математиков страны. На церемонии закрытия награды победителям олимпиады и дипломы вручил министр образования и науки Российской Федерации Д.В.Ливанов, с напутствием для одаренных школьников выступил лауреат Филдсовской премии С.К.Смирнов.

Кроме традиционных экскурсий в программу олимпиады были включены научно-популярные лекции известных математиков: «Задачи простые и сложные» А.Шеня, «Что такое случайное блуждание?» С.Смирнова, «Сложность вычисления, и почему без нее не прожить» Э.Гирша.

Ниже приведены условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

### 9 класс

1. Числа  $a$  и  $b$  таковы, что каждый из двух квадратных трехчленов  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + bx + a$  имеет по два различных корня, а произведение этих трехчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трех корней.

*С.Берлов*

2. Параллелограмм  $ABCD$  таков, что  $\angle B < 90^\circ$  и  $AB < BC$ . Точки  $E$  и  $F$  выбраны на окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , так, что касательные к  $\omega$  в этих точках проходят через  $D$ . Оказалось, что  $\angle EDA = \angle FDC$ . Найдите угол  $ABC$ .

*А.Якубов*

3. Натуральные числа  $a$ ,  $x$  и  $y$ , большие 100, таковы, что  $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$ . Какое наименьшее значение может принимать дробь  $a/x$ ?

*В.Сендеров*

4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдется одна, которая проиграла не более чем четырем из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всем турнире найдется команда, проигравшая не более чем четырем из остальных 109 команд.

*С.Берлов*

5. По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных?

*С.Берлов*

6. См. задачу M2398 «Задачника «Кванта».

7. Остроугольный треугольник  $ABC$  ( $AB < AC$ ) вписан в окружность  $\Omega$ . Пусть  $M$  – точка пересечения его медиан, а  $AH$  – высота этого треугольника. Луч  $MH$  пересекает  $\Omega$  в точке  $A'$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $A'NB$ , касается  $AB$ .

*А.Голованов, А.Якубов*

8. См. задачу M2402 «Задачника «Кванта».

### 10 класс

1. См. задачу M2400,а «Задачника «Кванта».

2. Дан параллелограмм  $ABCD$ , в котором  $AB < AC < BC$ . Точки  $E$  и  $F$  выбраны на окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , так, что касательные к  $\omega$  в этих точках проходят через  $D$ ; при этом отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются. Оказалось, что  $\angle ABF = \angle DCE$ . Найдите угол  $ABC$ .

*А.Якубов, С.Берлов*

3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению – к худшему). Оказалось, что ни для каких трех участников  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не нашлось трех судей, один из которых считает, что  $A$  – лучший из трех, а  $B$  – худший, другой – что  $B$  лучший, а  $C$  худший, а третий – что  $C$  лучший, а  $A$  худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников  $A$  и  $B$  тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

*И.Богданов*

4. Обозначим через  $S(k)$  сумму цифр натурального числа  $k$ . Натуральное число  $a$  назовем  $n$ -хорошим, если существует такая последовательность натуральных чисел  $a_0, a_1, \dots$

...,  $a_n$ , что  $a_n = a$  и  $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$  при всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Верно ли, что для любого натурального  $n$  существует натуральное число, являющееся  $n$ -хорошим, но не являющееся  $(n+1)$ -хорошим?

*А. Антропов*

5. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на  $n$  одинаковых фигурок из  $k$  клеток. Докажите, что его можно разрезать и на  $k$  одинаковых фигурок из  $n$  клеток.

*С. Волчѣнков*

6. См. задачу М2397 «Задачника «Кванта».

7. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$  и высота  $AH$ . На прямых  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $QM \perp AC$  и  $PM \perp AB$ . Окружность, описанная около треугольника  $PMQ$ , пересекает прямую  $BC$  вторично в точке  $X$ . Докажите, что  $BH = CX$ .

*М. Дидин*

8. См. задачу М2404 «Задачника «Кванта».

*11 класс*

1. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Пусть  $n > 1$  – натуральное число. Выпишем дроби  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$  и приведем каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через  $f(n)$ . При каких натуральных  $n > 1$  числа  $f(n)$  и  $f(2015n)$  имеют разную четность?

*А. Голованов*

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. См. задачу М2403 «Задачника «Кванта».

5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго – 5, третьего – 9, и так далее (длина  $k$ -го прыжка равна  $2^k + 1$ ). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше чем по разу)?

*С. Берлов*

6. См. задачу М2399 «Задачника «Кванта».

7. Неравносторонний треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательная к этой окружности в точке  $C$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$ . Пусть  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Прямые  $AI$  и  $BI$  пересекают биссектрису угла  $CDB$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно. Пусть  $M$  – середина отрезка  $PQ$ . Докажите, что прямая  $MI$  проходит через середину дуги  $ACB$  окружности  $\omega$ .

*М. Кунгожин*

8. Даны натуральные числа  $a$  и  $b$ , причем  $a < b < 2a$ . На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике  $a \times b$  или  $b \times a$  есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем  $\alpha$  можно утверждать, что для любого натурального  $N$  найдется клетчатый квадрат  $N \times N$ , в котором отмечено хотя бы  $\alpha N^2$  клеток?

*И. Богданов, О. Подлипский*

## Дипломанты олимпиады

*Диплом победителя*

**по 9 классам** получили

*Иванов Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Ягудин Амир* – Казань, лицей 131,

*Крымский Станислав* – Санкт-Петербург, лицей ФТШ РАН,

*Жуков Матвей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Токмачев Александр* – Ярославль, школа 33 им. К. Маркса с углубленным изучением математики;

**по 10 классам** –

*Юргин Григорий* – Москва, лицей «Вторая школа»,

*Киракосян Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Соколов Игнат* – Курган, гимназия 31,

*Лучкин Вадим* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

*Петров Семен* – Ярославль, школа 12,

*Панаев Александр* – Курган, гимназия 47,

*Каламбет Анатолий* – Москва, школа «Интеллектуал»;

**по 11 классам** –

*Салимов Руслан* – Москва, школа 1329,

*Фролов Иван* – Москва, школа 1329,

*Бочков Иван* – Ижевск, ИЭМЛ 29,

*Сеянин Федор* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

*Сергунин Андрей* – Новосибирск, гимназия 1,

*Думанский Илья* – Новосибирск, гимназия 1.

*Диплом призера*

**по 9 классам** получили

*Чарковский Георгий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Мигрин Виктор* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Чулкова Ксения* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,

*Виравчев Арсений* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Сафонов Иван* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Толокно Изабелла* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Орешиников Даниил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Абдрахманов Марат* – Челябинск, лицей 31,

*Дидин Александр* – Переславль-Залесский, гимназия,

*Дмитриева Мария* – Москва, лицей «Вторая школа»,

*Морозов Егор* – Москва, лицей «Вторая школа»,

*Лисоветин Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Толмачев Александр* – Саров, лицей 3,

*Лупуляк Василий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Ярцев Дмитрий* – Челябинск, лицей 31,

*Долгих Сергей* – Рыбинск, лицей 2,

*Мещеряков Николай* – Курган, гимназия 30,

*Зайцев Тимофей* – Москва, школа 179,

*Добронравов Никита* – Новосибирск, лицей 130 им. академика М.А. Лаврентьева,

*Богданова Екатерина* – Москва, школа 1329,

*Власков Андрей* – Саров, лицей 15 им. академика

Ю.Б. Харитона,

*Барышников Артем* – Москва, школа 179,



*Быкова Софья* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Урманов Максим* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Семенов Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Спиридонов Игорь* – Москва, школа 179,  
*Карагодин Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Гилязов Юлиан* – Оренбургская обл., Абдулинский р-н, школа 3,  
*Федорец Никита* – Москва, школа 1329,  
*Бикеев Артур* – Казань, лицей 131,  
*Новиков Михаил* – Новосибирск, лицей 9,  
*Фафурин Олег* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Добронравов Егор* – Новосибирск, лицей 130 им. академика М.А.Лаврентьева,  
*Лямкин Михаил* – Барнаул, гимназия 42,  
*Рябов Егор* – Москва, школа 2086,  
*Окопная Евгения* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,  
*Нефедов Андрей* – Иваново, лицей 33,  
*Шеремет Артем* – Москва, школа 1329,  
*Югов Василий* – Пермь, школа 46 с углубленным изучением математики, физики и информатики,  
*Андреев Яков* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Евсеев Павел* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Студеникина Алевтина* – Москва, школа 1329,  
*Мухаметишина Камиля* – Казань, лицей 131,  
*Евтушевская Ариадна* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Воронов Артем* – Серпухов, школа 9 с углубленным изучением отдельных предметов,  
*Кравцова Екатерина* – Белгород, лицей 38,  
*Дроздова Александра* – Нижний Новгород, лицей 165 им.65-летия «ГАЗ»,  
*Иго Андрей* – Новосибирск, гимназия 6 «Горностаи»,  
*Левин Лев* – Новороссийск, гимназия 5,  
*Чепасов Анатолий* – Ульяновск, гимназия 13;

#### по 10 классам –

*Крутовский Роман* – Москва, гимназия 1514,  
*Вепрев Георгий* – Рыбинск, лицей 2,  
*Губкин Павел* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Рябов Павел* – Москва, гимназия 1543,  
*Османкин Евгений* – Новороссийск, гимназия 5,  
*Акилбаева Екатерина* – Москва, школа 218,  
*Лиждвой Валентин* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Алексеев Ярослав* – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,  
*Ахметов Жанат* – Курган, гимназия 47,  
*Фадин Михаил* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Цой Никита* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,  
*Меньшенин Алексей* – Москва, лицей 1568 им. Пабло Неруды,  
*Балакин Андрей* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,  
*Лялина Альбина* – Ижевск, ИЭМЛ 29,  
*Азангулов Искандер* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Макеев Владислав* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Шамсутдинов Булат* – Казань, лицей 131,  
*Овечкин Григорий* – Ижевск, ИЭМЛ 29,  
*Кора Александр* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Бабушкин Егор* – Курган, школа 22,  
*Зенкова Яна* – Новосибирск, СУНЦ НГУ,  
*Мосеева Татьяна* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики,  
*Лупуляк Ольга* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Коваленко Кирилл* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Ким Раиса* – Москва, школа 1329,  
*Горячев Владимир* – Москва, гимназия 1514,  
*Чуфаровский Николай* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Зайцев Егор* – Ижевск, ИЭМЛ 29,  
*Марченко Артемий* – Саров, лицей 15 им. академика Ю.Б. Харитона,  
*Файрушин Айдар* – Набережные Челны, гимназия 26,  
*Молчанова Вероника* – Краснодар, лицей 64,  
*Кошелев Михаил* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Терехов Михаил* – Ульяновск, Ульяновский городской лицей при УлГТУ,  
*Зосимова Жанна* – Ижевск, ИЭМЛ 29,  
*Лычагина Елена* – Курган, гимназия 19,  
*Путилин Михаил* – Новосибирск, гимназия 6 «Горностаи»;

#### по 11 классам –

*Гладков Никита* – Томск, ФТЛ,  
*Зимин Александр* – Ульяновск, школа 52,  
*Лосев Илья* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Новиков Святослав* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Кузнецов Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Макаров Владислав* – Санкт-Петербург, школа 450,  
*Куликов Алексей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,  
*Матвеев Александр* – Москва, школа 171,  
*Богданов Илья* – Москва, школа 2086,  
*Нестеров Никита* – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,  
*Зубрилина Нина* – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,  
*Монаков Григорий* – Санкт-Петербург, лицей 533 «Образовательный комплекс «Малая Охта»,  
*Стороженко Андрей* – Омск, гимназия 117,  
*Белых Евгений* – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,  
*Ходунов Павел* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Тарасов Александр* – Иркутск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,  
*Васильчишин Сергей* – Киров, ФМЛ,  
*Шатский Владимир* – Москва, гимназия 1514,  
*Очков Дмитрий* – Москва, гимназия 1588,  
*Румянцев Владислав* – Москва, школа 179,  
*Ахтямов Данил* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Мрыхин Михаил* – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,  
*Пустовойтов Сергей* – Югра, Югорский физико-математический лицей-интернат,  
*Хадаев Константин* – Новосибирск, школа 83,  
*Мягков Константин* – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,  
*Мусаткина Дарья* – Чебоксары, лицей 3,  
*Басимова Наталья* – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,  
*Шатохин Анатолий* – Краснодар, школа 74,  
*Багиров Фарид* – Санкт-Петербург, лицей 533 «Образовательный комплекс «Малая Охта»,  
*Лукиянов Илья* – Ульяновск, Ульяновский городской лицей при УлГТУ,  
*Евтушевский Всеволод* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Тыщук Кирилл* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Лужецкий Илья* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Вахрина Анастасия* – Йошкар-Ола, лицей 28,  
*Манучарян Вардан* – Магнитогорск, школа 5 с углубленным изучением математики,  
*Валиуллин Артур* – Уфа, гимназия 93,

Якушева Софья – Воронеж, лицей «Многоуровневый общеобразовательный комплекс 2»,  
 Бобров Алексей – Кострома, лицей 34,  
 Зайцева Татьяна – Москва, школа 179,  
 Демидов Даниил – Нижний Новгород, гимназия 17,  
 Ипатов Михаил – Москва, СУНЦ МГУ.

*Специальные призы*

**за абсолютный результат на олимпиаде** получили  
 Иванов Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 9кл.,  
 Салимов Руслан – Москва, школа 1329, 11 кл.;

**за решение всех задач олимпиады** –  
 Ягудин Амир – Казань, лицей 131, 9 кл.,

Юргин Григорий – Москва, лицей «Вторая школа»,  
 10 кл.;

**за красивое решение самой сложной задачи олимпиады** –  
 Петров Семен – Ярославль, школа 12, 10 кл.;

**за красивое решение сложной комбинаторной задачи 8 для 11 класса** –

Фролов Иван – Москва, школа 1329.

*Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов,  
 П.Кожевников, О.Подлипский*

## З а к л ю ч и т е л ь н ы й э т а п Х L I X В с е р о с с и й с к о й о л и м п и а д ы ш к о л ь н и к о в п о ф и з и к е

В этом году заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике прошел в Екатеринбурге. В олимпиаде приняли участие 266 школьников из 52 субъектов РФ и 2 школьника из Республики Беларусь.

Самые многочисленные команды представили город Москва, Республика Мордовия и город Санкт-Петербург. Участники 34 субъектов не смогли преодолеть квалификационный барьер на региональном этапе (11 класс – 58 баллов, 10 класс – 56,5 балла, 9 класс – 51 балл) и на заключительный этап направили по одному участнику, набравшему наивысшее количество баллов в своем регионе.

Как и в прежние годы, каждому участнику заключительного этапа олимпиады было предложено решить пять теоретических задач и выполнить два экспериментальных задания. Анализ работ участников показал, что коэффициент корреляции между теорией и экспериментом наименьший для девятиклассников и почти в три раза больше для одиннадцатиклассников. Это свидетельствует о том, что если в 9 классе умение решать теоретические задачи слабо связано с умением выполнять экспериментальные задания, то к 11



*Олимпийцы позируют*

классу уровень участников возрастает настолько, что количество баллов как за теорию, так и за эксперимент больше зависит от степени подготовки участника, чем от случайных факторов.

Ниже приводятся задачи теоретического тура и список победителей заключительного этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по физике.

### Т Е О Р Е Т И Ч Е С К И Й Т У Р

*9 класс*

#### Задача 1. Разгон поезда

Машинист настроил бортовой компьютер электрички так, чтобы он показывал среднюю скорость  $v$  на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод (рис.1). Расстояния между любыми двумя



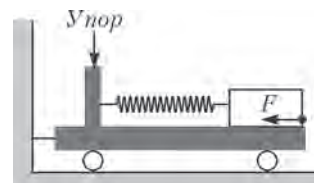
*Рис. 1*

соседними опорами одинаковы. Электричка отправляется с платформы «Новодачная» и разгоняется с постоянным ускорением. Через некоторое время машинист увидел, что компьютер показывает скорость  $v_1 = 20$  км/ч. На следующем участке скорость оказалась  $v_2 = 30$  км/ч. Какой была мгновенная скорость  $u$  электрички на границе между первым и вторым участками?

*В.Слободянин*

#### Задача 2. Нажали и отпустили

Тележка соединена со стеной жестким стержнем (рис.2). К ее упору прикреплена пружина, другой конец



*Рис. 2*



Теоретические размышления

которой связан с бруском. Вначале пружина не деформирована. На брусок в течение некоторого времени действует постоянная горизонтальная сила  $F$ , направленная вдоль тележки. После прекращения действия этой силы брусок еще некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая со стороны тележки на брусок, равна  $f$ . Трение в осях колес не учитывайте.

1) С какой силой  $N$  тележка давила на стержень в момент прекращения действия силы  $F$ ?

2) Найдите наибольшее значение  $N_{\max}$  силы давления тележки на стержень.

И. Воробьев

### Задача 3. Жара в холодильнике

В жаркие летние дни, когда в комнате установилась температура  $t_0 = 30^\circ\text{C}$ , экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что время работы двигателя холодильника стало вдвое превышать время бездействия. Решив оптимизировать его работу, экспериментатор регулятором изменил температуру внутри холодильника на  $\theta = 9^\circ\text{C}$ . В результате время бездействия стало вдвое больше времени работы. Определите:

1) на какие температуры  $t_1$  и  $t_2$  был настроен регулятор в начале и в конце эксперимента;

2) на какую внутреннюю температуру  $t_{\text{вн}}$  надо выставить регулятор, чтобы двигатель холодильника начал работать без перерыва;

3) при какой выставленной регулятором температуре  $t_3$  частота включения холодильника станет максимальной.

**Указание.** Регулятор задает температуру  $t$  внутри холодильника в небольшом интервале  $t \pm \Delta t/2$ . Когда температура внутри становится равной  $t + \Delta t/2$ , двигатель холодильника включается, когда она снижается до  $t - \Delta t/2$  – выключается. Считайте, что:

а) мощность подводимого количества теплоты пропорциональна разности температур внутри холодильника и окружающей среды и постоянна во всем интервале внутренних температур  $t \pm \Delta t/2$ ;

б) тепловая мощность, отбираемая двигателем во время его работы у внутреннего объема холодильника, не зависит от температуры;

в) изменением температуры в комнате можно пренебречь.

М.Замятнин, И.Зыков

### Задача 4. Неидеальные диоды

Электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке 3, содержит три одинаковых резистора сопротивлением  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  и три одинаковых диода  $D_1, D_2, D_3$ . Зависимость силы тока, протекающего через диод, от напря-

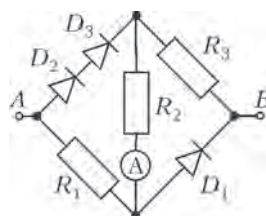


Рис. 3

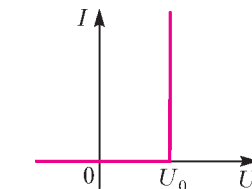


Рис. 4

жения на нем представлена на рисунке 4. Определите силу тока  $I_A$  через амперметр в зависимости от напряжения  $U_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$ . Амперметр идеальный. Постройте график зависимости  $I_A$  от  $U_{AB}$ , указав значение силы тока и напряжение в характерных точках (например, максимум, минимум, излом).

А.Аполонский

### Задача 5. Чунга-Чанга

Чебурашка и крокодил Гена весной поехали в Лагерь Дружбы на острове Чунга-Чанга. Остров расположен на экваторе. На территории лагеря построены два типовых 100-этажных корпуса (в виде прямоугольных параллелепипедов), один строго на востоке от другого. Здания корпусов параллельны друг другу и перпендикулярны экватору (рис.5).



Рис. 5

Чебурашка поселился в западном корпусе, а крокодил Гена – на десятом этаже восточного корпуса. Окна их комнат оказались выходящими друг на друга. В день весеннего равноденствия, 21 марта, солнце светило в окно Гены в течение  $T_1 = 2$  ч, а в окно Чебурашки –  $T_2 = 4$  ч.

1) На каком этаже живет Чебурашка?

2) Что показывали часы Чебурашки, когда окна в корпусе Гены ему впервые показались золотыми?

3) В течение какого времени окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми?

**Примечание.** Окна кажутся золотыми, когда в них отражается солнце. Многократные отражения не учитываются. В 12:00 солнце находилось в зените.

Л.Мельниковский

10 класс

### Задача 1. Упругая система

На гладкой горизонтальной поверхности расположена конструкция, показанная на рисунке 6 (вид сверху). Один конец пружины жесткостью  $k_1$  прикреплен к грузу массой  $m$ , второй – к палочке  $\Pi$ . У пружины жесткостью  $k_2$  один конец закреплен неподвижно, а второй прикреплен к той же палочке  $\Pi$ . На палочку все время действует сила  $\vec{F}$ , остающаяся постоянной по величине и направлению что бы ни случилось. Сначала груз удерживают неподвижно, а затем отпускают без толчка.

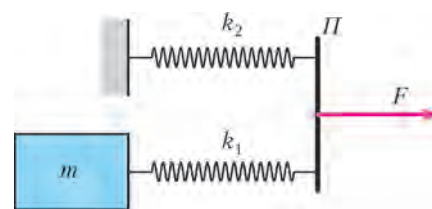


Рис. 6

1) Найдите максимальную скорость груза.

2) Найдите удлинение первой пружины в момент, когда ее длина будет минимальна.

Считайте, что масса пружин и палочки равна нулю,



длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, растяжения пружин в момент отпускания груза тоже одинаковы, силу  $\vec{F}$  прикладывают к палочке таким образом, что она движется поступательно (не поворачивается при движении), трение отсутствует.

*Д.Александров*

### Задача 2. Исследование планеты

Спускаемый аппарат осуществляет посадку на поверхность экзотической планеты. Во время спуска проводилось измерение зависимости давления  $p$  в атмосфере планеты от расстояния  $z$  до поверхности планеты (график на отдельном листе – см. рис. 2 в ответах). Измерение температуры, произведенное на высоте  $z_1 = 5$  км, дало значение  $T_1 = 250$  К. Вычислите температуру  $T_0$  у поверхности планеты. Считайте, что радиус планеты  $R \gg z_1$ . Атмосфера состоит из углекислого газа.

*Примечание.* График на отдельном листе необходимо сдать вместе с вашим решением.

*О.Шведов*

### Задача 3. Термоэлектродинамика

Два диска, по которым равномерно распределены заряды  $q$  и  $-q$ , могут двигаться без трения в длинном непроводящем теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально (рис.7). Расстояние между дисками много меньше их радиусов. Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет, система находится в равновесии. Заряды дисков мгновенно уменьшают вдвое, после чего ожидают прихода системы в равновесие. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменится температура газа и расстояние между дисками.

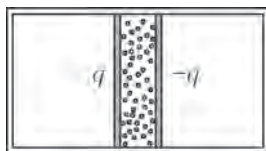


Рис. 7

*А.Черноуцан*

### Задача 4. Стенка с дыркой

Три одинаковых бруска движутся с одинаковыми скоростями  $v$  (рис.8). Длинная легкая упругая резинка, связывающая первый и второй бруски, проходит сквозь отверстие в массивной стене и через легкий блок, прикрепленный к третьему бруску. В начальный момент времени резинка не растянута. Определите скорости брусков после упругого столкновения первого бруска со стеной в момент времени, когда резинка оказалась:

- 1) максимально растянутой;
- 2) снова ненапрянутой.

Трение в системе не учитывайте. Считайте, что пока резинка не станет снова ненапрянутой, груз 2 не сталкивается с блоком, а груз 1 не ударяется о стену.

*И.Воробьев*

### Задача 5. Нелинейность

Некоторые элементы электрических цепей являются нелинейными, т.е. сила тока, протекающего через них, не пропорциональна приложенному напряжению. Допустим, что у нас есть лампа накаливания, для которой сила тока  $I_d$  пропорциональна  $\sqrt{U_d}$ , диод, у которого  $I_d$  пропорционально  $U_d^2$ , и источник постоянного напряжения. При этом и лампа, и диод обладают одинаковым свойством: если подключить любой из этих элементов к источнику в качестве нагрузки, то мощность тепловых потерь на на-



*Идет эксперимент*

грузке будет максимально возможной для данного источника. Если подключить к источнику лампу и диод, соединив их последовательно, то мощность потерь на такой нагрузке будет равна  $P_1 = 7,2$  Вт. Какой будет мощность, если в качестве нагрузки к источнику подключить лампу и диод, соединенные параллельно?

*К.Парфенов*

11 класс

### Задача 1. Колебания

По поверхности закрепленной диэлектрической полусферы равномерно распределен положительный электрический заряд (рис.9). Ось симметрии полусферы вертикальна. В точке  $O$ , совпадающей с центром кривизны полусферы, закреплен математический маятник в виде небольшого шарика с зарядом  $q_1$ , висящего на нити, длина которой меньше радиуса полусферы. Период гармонических колебаний шарика вблизи положения равновесия, в котором нить вертикальна, равен  $T$ . После того как заряд шарика изменили так, что он стал равен  $q_2$ , причем  $|q_2/q_1| = 2$ , период гармонических колебаний шарика вблизи нового положения равновесия, в котором нить тоже вертикальна, снова оказался равным  $T$ . Найдите числовое значение  $T$ , если известно, что период гармонических колебаний маятника в незаряженной чаше равен  $T_0 = 1,0$  с. Поле поляризационных зарядов не учитывайте.

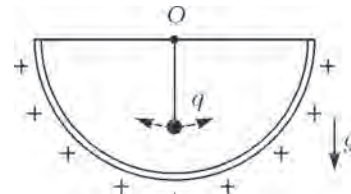


Рис. 9

*С.Варламов, А.Гуденко*

### Задача 2. Проводящий кубик

Кубик составлен из шести одинаковых проводящих пластин с просверленными по центру одинаковыми отверстиями (рис.10). В вершины кубика вставлены одинаковые маленькие хорошо проводящие шарики, к которым можно присоединять провода. Диаметры отверстий таковы, что электрическое сопротивление кубика между его соседними вершинами  $A$  и  $B$  оказалось равным  $R_{AB} = r = 32$  кОм. Если через эти вершины пропустить ток  $I = 1$  мА в направлении, указанном на рисунке, то разность потенциалов между точкой  $M$  (серединой ребра  $AB$ ) и вершиной  $C$  будет равна  $U_{MC} = \phi_M - \phi_C = U = 2,0$  В.

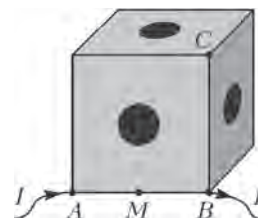


Рис. 10

Определите сопротивление  $R_{AC}$  между точками  $A$  и  $C$ . Как изменятся сопротивления  $R_{AB}$  и  $R_{AC}$ , если, не изменяя толщину пластин, увеличить их размеры и размер отверстий в 2 раза?

*Е. Савинов*

### Задача 3. Реактивная трубка

В середине длинной трубки, открытой с обоих концов, перпендикулярно к ее оси закреплен нагреватель в виде тонкой вольфрамовой сеточки. Система находится в воздухе при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ , ее общая масса  $m = 17$  г. В начальный момент трубке сообщается скорость  $v_0 = 1$  см/с вдоль ее оси, к нагревателю начинает подводиться мощность  $q = 20$  Вт, и трубка начинает разгоняться. Какой скорости достигнет трубка на пути разгона  $s = 20$  м? Сопротивлением воздуха пренебрегите. Давление внутри трубки считайте одинаковым, силу тяжести и теплообмен через стенку трубки не учитывайте. Считайте, что изменение кинетической энергии потока воздуха при пересечении сеточки мало по сравнению с изменением его внутренней энергии. Считайте воздух двухатомным газом с молярной массой  $M = 29$  г/моль.

*А. Гуденко*

### Задача 4. Космический объект

Космический объект, движущийся вдоль некоторой прямой с постоянной скоростью, испускает периодические радиопульсы. Астроном установил, что за время наблюдения  $\Delta t$  видимое направление на этот объект изменилось на малый угол  $\Delta\varphi$ , а период между моментами прихода радиопульсов изменился от  $T$  до  $T + \Delta T$ , где  $\Delta T \ll T$ . Найдите расстояние от наблюдателя до объекта. Скорость радиопульсов равна скорости света  $c$ .

*И. Воробьев*

### Задача 5. «Миллиавтомобиль»

Очень маленький, размером с муравья, автомобиль едет по ровной горизонтальной поверхности вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$ . На его крыше закреплен точечный источник света  $S$ , находящийся на главной оптической оси линзы. Скорость автомобиля изменяется так, что скорость изображения  $S_1$  точечного источника  $S$  остается постоянной и равной  $v_0$ . Определите, на каких расстояниях от линзы возможно такое движение «миллиавтомобиля». Коэффициент трения между его колесами и дорогой равен  $\mu$ .

*С. Варламов*

## Победители заключительного этапа олимпиады

### 9 класс

*Николай Чикин* – Москва,  
*Захар Яковлев* – Санкт-Петербург,  
*Дмитрий Садыков* – Казань,  
*Владимир Малиновский* – Санкт-Петербург,  
*Яков Андреев* – Санкт-Петербург,  
*Артем Шеремет* – Москва,  
*Борис Билич* – Жуковский Московской обл.,  
*Владимир Голод* – Москва,  
*Артем Петров* – Санкт-Петербург,  
*Всеволод Пухов* – Москва;

### 10 класс

*Максим Елисеев* – Республика Мордовия,  
*Илья Зыков* – Республика Мордовия,

*Дмитрий Норкин* – Москва,  
*Антон Малинский* – Уфа,  
*Никита Семенов* – Югра,  
*Александр Артемьев* – Киров,  
*Василий Югов* – Пермь;

### 11 класс

*Максим Соколов* – Самара,  
*Кирилл Казарновский* – Долгопрудный Московской обл.,  
*Артем Стоян* – Астрахань,  
*Иван Утешев* – Республика Мордовия,  
*Кирилл Воронин* – Магнитогорск,  
*Никита Гладков* – Томск,  
*Кирилл Дубовицкий* – Москва,  
*Алексей Красников* – Бугульма.

*Публикацию подготовил В. Слободянин*

# LVI Международная математическая олимпиада

С 4 по 16 июля 2015 года в городе Чианг Май (Таиланд) прошла LVI Международная математическая олимпиада (ММО). В ней приняли участие 577 юных математиков из 104 стран мира.

В нашу сборную вошли четверо выпускников: *Иван Бочков* (Ижевск), *Никита Гладков* (Томск), *Александр Зимин* (Ульяновск) и *Александр Кузнецов* (Санкт-Петербург), а также двое десятиклассников из Москвы – *Руслан Салимов* и *Иван Фролов*.

Вариант олимпиады этого года оказался весьма трудным – лишь считанному числу участников олимпиады удалось преодолеть рубеж в 4 решенные задачи. Результаты членов команды России оказались неплохими и достаточно ровными, но в среднем менее успешными, чем в последние годы, – все ребята получили серебряные медали. Одной из причин не самого яркого выступления стала структура варианта нынешнего года: красивым и идейно сложным задачам

3 и 6 в каждом из двух туров олимпиады предшествовала технически трудная задача, на которую требовалось затратить много времени и сил.

Приводим таблицу с результатами выступления нашей сборной (каждая задача оценивалась из 7 баллов):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов
	1	2	3	4	5	6	
Бочков Иван	7	2	1	7	1	7	25
Фролов Иван	7	3	2	7	3	0	22
Гладков Никита	7	3	1	7	0	7	25
Кузнецов Александр	7	2	1	7	2	2	21
Салимов Руслан	7	3	2	7	2	2	23
Зимин Александр	7	6	1	7	1	3	25



Слева направо: Н.Агаханов (руководитель команды), И.Бочков, А.Кузнецов, А.Зимин, И.Фролов, Д.Терёшин (зам. руководителя), Р.Салимов, Н.Гладков

Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах есть на официальном сайте олимпиады [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org).

В этом году летние учебно-тренировочные сборы для команды и ближайшего резерва были проведены в Сочи в рамках первой смены образовательного центра «Сириус» (<http://siriusdeti.ru>), который был создан по инициативе Президента России В.В.Путина фондом «Талант и успех». Руководители команды благодарны правлению фонда «Талант и успех» и все организаторам центра «Сириус» за прекрасные условия, созданные для проведения занятий и досуга ребят. Благодаря фонду усилилась работа на перспективу: по сравнению с прошлым годом почти вдвое увеличилось число участников сборов – кандидатов в сборные России следующих лет.

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Конечное множество  $S$  точек на плоскости будем называть *сбалансированным*, если для любых различных точек  $A$  и  $B$  из множества  $S$  найдется точка  $C$  из множества  $S$  такая, что  $AC = BC$ . Множество  $S$  будем называть *эксцентричным*, если для любых трех различных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  из множества  $S$  не существует точки  $P$  из множества  $S$  такой, что  $PA = PB = PC$ .

а) Докажите, что для любого целого  $n \geq 3$  существует сбалансированное множество, состоящее из  $n$  точек.

б) Найдите все целые  $n \geq 3$ , для которых существует сбалансированное эксцентричное множество, состоящее из  $n$  точек.

Нидерланды

2. Найдите все тройки  $(a, b, c)$  целых положительных чисел такие, что каждое из чисел  $ab - c$ ,  $bc - a$ ,  $ca - b$  является степенью двойки. (Степенью двойки называется число вида  $2^n$ , где  $n$  – целое неотрицательное число.)

Сербия

3. Пусть  $ABC$  – остроугольный треугольник, в котором  $AB > AC$ . Пусть  $\Gamma$  – окружность, описанная около него,  $H$  – его ортоцентр, а  $F$  – основание высоты, опущенной из вершины  $A$ . Пусть  $M$  – середина стороны  $BC$ . Пусть  $Q$  – точка на окружности  $\Gamma$  такая, что  $\angle HQA = 90^\circ$ , а  $K$  – точка на окружности  $\Gamma$  такая, что  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Пусть точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  и  $Q$  различны и лежат на окружности  $\Gamma$  в указанном порядке. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $QHN$  и  $FKM$ , касаются друг друга.

Украина

4. Пусть  $\Omega$  – окружность, описанная около треугольника  $ABC$ , а точка  $O$  – ее центр. Окружность  $\Gamma$  с центром  $A$  пересекает отрезок  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  так, что точки  $B$ ,  $D$ ,  $E$  и  $C$  все различны и лежат на прямой  $BC$  в указанном порядке. Пусть  $F$  и  $G$  – точки пересечения окружностей  $\Gamma$  и  $\Omega$ , при этом точки  $A$ ,  $F$ ,  $B$ ,  $C$  и  $G$  лежат на  $\Omega$  в указанном порядке. Пусть  $K$  – вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника  $BDF$ , и отрезка  $AB$ . Пусть  $L$  – вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника  $CGE$ , и отрезка  $CA$ . Пусть прямые  $FK$  и  $GL$  различны и пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что точка  $X$  лежит на прямой  $AO$ .

Греция

5. Пусть  $\mathbb{R}$  – множество всех действительных чисел. Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие равенству

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

для всех действительных чисел  $x$  и  $y$ .

Албания

6. Последовательность  $a_1, a_2, \dots$  целых чисел удовлетворяет следующим условиям:

(i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  для всех  $j \geq 1$ ;

(ii)  $k + a_k \neq l + a_l$  для всех  $1 \leq k < l$ .

Докажите, что существуют два положительных целых числа  $b$  и  $N$  таких, что

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

для всех целых чисел  $m$  и  $n$ , удовлетворяющих условию  $n > m \geq N$ .

Австралия

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин

# XLVI Международная физическая олимпиада

В городе Мумбаи (Индия) с 5 по 12 июля 2015 года прошла очередная Международная олимпиада школьников по физике. В олимпиаде приняли участие 84 страны.

Участникам олимпиады предлагались три теоретические задачи (теоретический тур) и две экспериментальные задачи (экспериментальный тур). Все задачи оценивались мак-

симум по 10 баллов. Таким образом, каждый участник мог набрать максимум 50 баллов.

В сборную России вошли пять школьников:

Кирилл Воронин (Магнитогорск, Челябинская обл.),  
Георгий Корепанов (Саранск, Мордовия),  
Алексей Красников (Бугульма, Татарстан),



Дмитрий Татаркин (Саранск, Мордовия),  
Иван Утешев (Саранск, Мордовия).

Минимальное количество баллов, необходимое для получения золотой медали, составило 42,2 балла, для получения серебряной медали – 33,0 баллов. Вот как выступила наша команда:

	T1	T2	T3	Э1	Э2	Сумма баллов	Медаль
А.Красников	9,8	9,6	9,8	9,4	8,6	47,2	золотая
К.Воронин	9,3	8,4	9,4	8,5	6,6	42,2	золотая
Г.Корепанов	8,7	7,4	8,3	9,7	9,1	43,2	золотая
Д.Татаркин	9,3	8,9	6,3	9,7	8,9	43,1	золотая
И.Утешев	9,9	8,6	8,4	8,5	6,5	41,9	серебряная

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### Задача 1. Частицы от Солнца (10 баллов)

Фотоны, излучаемые с поверхности Солнца, и нейтрино из его ядра несут нам информацию о температурах Солнца, а также могут подтвердить, что Солнце светит благодаря ядерным реакциям.

Во всех пунктах этой задачи примите массу Солнца  $M_{\odot} = 2,00 \cdot 10^{30}$  кг, его радиус  $R_{\odot} = 7,00 \cdot 10^8$  м, его мощность (энергия, излученная в единицу времени)  $L_{\odot} = 3,85 \cdot 10^{26}$  Вт и расстояние от Земли до Солнца  $d_{\odot} = 1,50 \cdot 10^{11}$  м.

Примечание:

$$\int x e^{ax} dx = \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + \text{const},$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + \text{const},$$

$$\int x^3 e^{ax} dx = \left( \frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + \text{const}.$$

### Часть А. Излучение Солнца

**A1.** Полагая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислите температуру  $T_{\text{п}}$  поверхности Солнца. (0,3 б.)

Спектр солнечного излучения может быть хорошо аппроксимирован распределением Вина. Соответственно, солнечная энергия, приходящая в единицу времени в единичном диапазоне частот на некоторую площадку на Земле, зависит от частоты так:

$$u(\nu) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_{\text{Б}} T_{\text{п}}}\right),$$

где  $\nu$  – частота излучения,  $A$  – площадь поверхности этой площадки, нормальной к направлению падающего излучения,  $k_{\text{Б}}$  – постоянная Больцмана.

Рассмотрим солнечный элемент, который представляет собой тонкий диск из полупроводникового материала площадью  $A$ . Солнечный элемент расположен перпендикулярно направлению падения солнечных лучей.

**A2.** Используя приближение Вина, выразите полную мощность солнечного излучения  $P$ , падающего на поверхность солнечного элемента, через  $A$ ,  $R_{\odot}$ ,  $d_{\odot}$ ,  $T_{\text{п}}$  и фундаментальные константы  $c$ ,  $h$ ,  $k_{\text{Б}}$ . (0,3 б.)

**A3.** Как зависит от частоты число фотонов  $n_{\nu}(\nu)$ , падающих в единицу времени в единичном диапазоне частот на



Национальная сборная России. Слева направо: Д.Татаркин, И.Утешев, Г.Корепанов, А.Красников, К.Воронин

поверхность солнечного элемента? Выразите ответ через  $A$ ,  $R_{\odot}$ ,  $d_{\odot}$ ,  $T_{\text{п}}$ ,  $\nu$  и фундаментальные константы  $c$ ,  $h$ ,  $k_{\text{Б}}$ . (0,2 б.)

У полупроводника, из которого изготовлен солнечный элемент, ширина запрещенной зоны  $E_{\text{з}}$ . Используйте следующую модель. Каждый фотон с энергией  $E \geq E_{\text{з}}$  позволяет электрону преодолеть запрещенную зону. Возбужденный электрон может преобразовать в полезную энергию только  $E_{\text{з}}$ , остальная часть энергии рассеивается в виде тепла (не может быть преобразована в полезную).

**A4.** Считайте, что  $x_{\text{з}} = h\nu_{\text{з}}/(k_{\text{Б}}T_{\text{п}})$ , где  $E_{\text{з}} = h\nu_{\text{з}}$ . Выразите полезную мощность солнечного элемента  $P_{\text{пол}}$  через  $x_{\text{з}}$ ,  $A$ ,  $R_{\odot}$ ,  $d_{\odot}$ ,  $T_{\text{п}}$  и фундаментальные константы  $c$ ,  $h$ ,  $k_{\text{Б}}$ . (1 б.)

**A5.** Выразите КПД солнечного элемента  $\eta$  через  $x_{\text{з}}$ . (0,2 б.)

**A6.** Нарисуйте качественный график зависимости  $\eta$  от  $x_{\text{з}}$ . Явно укажите значения  $\eta$  при  $x_{\text{з}} = 0$  и  $x_{\text{з}} \rightarrow \infty$ . Чему равен угловой коэффициент касательной к графику  $\eta(x_{\text{з}})$  при  $x_{\text{з}} = 0$  и  $x_{\text{з}} \rightarrow \infty$ ? (1 б.)

**A7.** Пусть  $x_0$  – это такое значение  $x_{\text{з}}$ , при котором  $\eta$  максимален. Получите кубическое уравнение, для которого  $x_0$  будет решением. Оцените численное значение  $x_0$  с точностью  $\pm 0,25$ . Рассчитайте также  $\eta(x_0)$ . (1 б.)

**A8.** Ширина запрещенной зоны чистого кремния  $E_{\text{з}} = 1,11$  эВ. Рассчитайте КПД кремниевый солнечного элемента  $\eta_{\text{Si}}$ , используя это значение. (0,2 б.)

В конце XIX века Кельвин и Гельмгольц для объяснения излучения Солнца предложили такую гипотезу. Они постулировали, что вначале Солнце было очень большим облаком материи массой  $M_{\odot}$  с пренебрежимо малой плотностью. Затем Солнце постоянно сжималось. Таким образом, Солнце могло бы светить, постоянно теряя гравитационную потенциальную энергию из-за своего медленного сжатия.

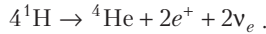
**A9.** Предположим, что плотность вещества внутри Солнца всюду одинакова. Найдите полную гравитационную потенциальную энергию Солнца  $\Omega$ , которой оно обладает в наши дни. Выразите ее через  $G$ ,  $M_{\odot}$  и  $R_{\odot}$ . (0,3 б.)

**A10.** Считая, что мощность излучения Солнца оставалась постоянной на протяжении всего времени, оцените максимально возможное время  $\tau$  (в годах), на протяжении которого Солнце могло светить согласно гипотезе Кельвина и Гельмгольца. (0,5 б.)

Значение  $\tau$ , рассчитанное выше, не согласуется с возрастом солнечной системы, который был оценен при изучении метеоритов. Это говорит о том, что источником энергии Солнца не может быть только гравитационная энергия.

**Часть В. Нейтрино от Солнца**

В 1938 Ганс Бете предположил, что ядерная реакция синтеза гелия из водорода, происходящая в ядре Солнца, это его источник энергии. Уравнение ядерной реакции:



Электронные нейтрино  $\nu_e$ , которые получаются в этой реакции, можно считать безмассовыми. Они вылетают из Солнца, и их обнаружение на Земле подтверждает, что внутри Солнца происходят ядерные реакции. Во всех пунктах этой задачи вы можете пренебречь энергией, уносимой нейтрино.

**В1.** Рассчитайте плотность потока нейтрино  $\Phi_\nu$  ( $\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ), которые достигают Земли. Энергия, которая выделяется в приведенной выше реакции,  $\Delta E = 4,0 \cdot 10^{-12}$  Дж. Считайте, что энергия, излучаемая Солнцем, полностью получается в приведенной выше реакции. (0,6 б.)

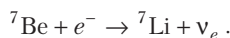
На пути из ядра Солнца к Земле часть электронных нейтрино  $\nu_e$  превращаются в нейтрино других типов  $\nu_x$ . Эффективность детектирования  $\nu_x$  составляет  $1/6$  эффективности детектирования  $\nu_e$ . Если бы не происходило превращения нейтрино, то мы в среднем детектировали бы  $N_1$  нейтрино в год. Однако из-за этих превращений в среднем детектируется  $N_2$  нейтрино в год ( $\nu_e$  и  $\nu_x$  вместе).

**В2.** Какая доля  $f$  частиц  $\nu_e$  превращается в  $\nu_x$ ? Выразите ответ через  $N_1$  и  $N_2$ . (0,4 б.)

Чтобы детектировать нейтрино, построены огромные детекторы, наполненные водой. Хотя взаимодействия нейтрино с веществом крайне редки, иногда они выбивают электроны из молекул воды в детекторе. Эти высокоэнергетические электроны летят в воде с большими скоростями и при этом излучают свет. До тех пор пока скорость электрона больше скорости света в воде (показатель преломления  $n$ ), это излучение, называемое излучением Черенкова, испускается в виде конуса.

**В3.** Предположим, что при движении в воде электрон, выбитый нейтрино, теряет энергию с постоянной скоростью  $\alpha$  в единицу времени. Найдите энергию  $E_{\text{пер}}$ , переданную электрону от нейтрино, считая, что после соударения такой электрон испускает черенковское излучение на протяжении времени  $\Delta t$ . Перед соударением электрон покоился. Выразите ответ через  $\alpha$ ,  $\Delta t$ ,  $n$ ,  $m_e$  и  $c$ . (2 б.)

Синтез гелия He из водорода H внутри Солнца происходит в несколько этапов. На одном из промежуточных этапов образуется ядро бериллия  $^7\text{Be}$  (масса покоя  $m_{\text{Be}}$ ). Оно может поглотить электрон и образовать ядро лития  $^7\text{Li}$  (масса покоя  $m_{\text{Li}} < m_{\text{Be}}$ ), испустив  $\nu_e$ . Соответствующая реакция такая:



Когда покоящееся ядро бериллия Be ( $m_{\text{Be}} = 11,65 \cdot 10^{-27}$  кг) поглощает покоящийся электрон, испускаемое нейтрино уносит энергию  $E_\nu = 1,44 \cdot 10^{-13}$  Дж. Однако ядра бериллия находятся в постоянном тепловом движении при температуре  $T_c$  ядра Солнца и представляют собой движущиеся

источники нейтрино. В результате энергия испущенных нейтрино варьируется в среднем на  $\Delta E_{\text{cp}}$  (среднеквадратичное отклонение).

**В4.** Принимая  $\Delta E_{\text{cp}} = 5,54 \cdot 10^{-17}$  Дж, рассчитайте среднеквадратичную скорость теплового движения ядер бериллия  $v_{\text{Be}}$  и затем оцените температуру  $T_c$  ядра Солнца. (Подсказка:  $\Delta E_{\text{cp}}$  зависит от среднеквадратичного значения проекции скорости на направление, вдоль которого ведется наблюдение.) (2 б.)

**Задача 2. Принцип экстремума (10 баллов)**

**Часть А. Принцип экстремума в механике**

Рассмотрим гладкую горизонтальную плоскость  $xy$  (рис.1). Она разделена на две области I и II линией  $AB$ , которая удовлетворяет уравнению  $x = x_1$ . Потенциальная энергия точечной частицы массой  $m$  равна нулю ( $V = 0$ ) в области I и  $V = V_0$  в области II. Частица начинает двигаться из начала координат  $O$  со скоростью  $v_1$  по прямой, направленной под углом  $\theta_1$  к оси  $x$ . Она достигает точки  $P$  в области II, имея скорость  $v_2$ , направленную под углом  $\theta_2$  к оси  $x$ . Силой тяжести и релятивистскими эффектами можно пренебречь во всех пунктах этой задачи.

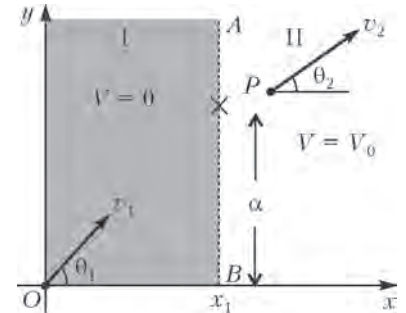


Рис. 1

**А1.** Получите выражение для  $v_2$  через  $m$ ,  $v_1$  и  $V_0$ . (0,2 б.)

**А2.** Выразите  $v_2$  через  $v_1$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . (0,3 б.)

Определим величину, называемую действием, как  $A = m \int v(s) ds$ , где  $ds$  — бесконечно малый элемент длины вдоль траектории частицы массой  $m$ , движущейся со скоростью  $v(s)$ . Интеграл берется вдоль траектории. Например, для частицы, движущейся с постоянной скоростью по окружности радиусом  $R$ , действие  $A$  за один оборот равно  $2\pi m R v$ . Можно показать, что для частицы с постоянной энергией  $E$  из всех возможных траекторий между двумя фиксированными точками реализуется та, вдоль которой действие  $A$ , определенное выше, имеет экстремум (минимум или максимум). Это утверждение известно как принцип наименьшего действия — ПНД.

**А3.** ПНД подразумевает, что траектория частицы, движущейся между двумя фиксированными точками в области постоянного потенциала, это прямая. Пусть координаты двух фиксированных точек  $O$  и  $P$  (рис.2) — это  $(0, 0)$  и  $(x_0, y_0)$  соответственно, а  $(x_1, \alpha)$  — это координаты точки на границе, где частица переходит из области I в область II. Отметим, что величина  $x_1$  фиксирована и действие  $A$  зависит только от координаты  $\alpha$ . Получите выражение для действия  $A(\alpha)$ . Используя ПНД, получите соотношение между  $v_1/v_2$  и упомянутыми координатами. (1 б.)

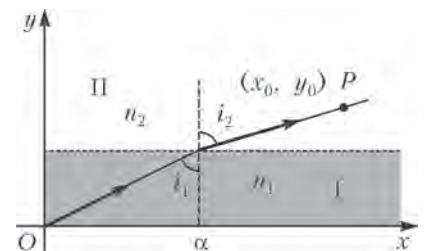


Рис. 2

### Часть В. Принцип экстремума в оптике

Луч света переходит из среды I в среду II с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  соответственно (см. рис.2). Эти две среды разделены линией, параллельной оси  $x$ . Луч света распространяется под углом  $i_1$  к оси  $y$  в среде I и под углом  $i_2$  в среде II. Чтобы получить траекторию луча, воспользуемся другим принципом экстремума (максимума или минимума) — принципом наименьшего времени Ферма.

**В1.** Принцип утверждает, что между двумя фиксированными точками луч света движется по такому пути, что время движения имеет экстремум. Получите соотношение между  $\sin i_1$  и  $\sin i_2$ , исходя из принципа Ферма. (0,5 б.)

На рисунке 3 схематически показана траектория лазерного луча, падающего горизонтально на раствор сахара, в котором концентрация сахара уменьшается с высотой. Следовательно, показатель преломления раствора также уменьшается с высотой.

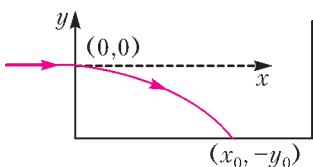


Рис.3. Сосуд с раствором сахара

**В2.** Пусть показатель преломления  $n(y)$  зависит только от  $y$ . Используя уравнение, полученное в пункте В1, получите выражение для углового коэффициента касательной к пути луча  $dy/dx$ . Выразите его через показатели преломления  $n_0$  (при  $y = 0$ ) и  $n(y)$ . (1,5 б.)

**В3.** На рисунке 3 показано, что лазерный луч направлен горизонтально из начала координат  $(0, 0)$  в раствор сахара. Он входит в раствор на расстоянии  $y_0$  от дна сосуда. Считайте, что  $n(y) = n_0 - ky$ , где  $n_0$  и  $k$  — положительные константы. Получите выражение для траектории лазерного луча в таком сосуде, т.е. найдите, как  $x$  зависит от  $y$  и остальных параметров задачи. (1,2 б.)

*Примечание:*  $\int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) + \operatorname{const}$ , где  $\sec \theta = 1/\cos \theta$ ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \operatorname{const}.$$

**В4.** Рассчитайте значение  $x_0$  точки, в которой луч падает на дно сосуда. Считайте, что  $y_0 = 10,0$  см,  $n_0 = 1,50$ ,  $k = 0,050 \text{ см}^{-1}$ . (0,8 б.)

### Часть С. Принцип экстремума и волновая природа материи

Теперь исследуем связь между ПНД и волновой природой движущейся частицы. Для этого предположим, что частица, движущаяся из точки  $O$  в точку  $P$ , может выбирать все возможные траектории. Будем искать траекторию, соответствующую взаимоусиливающей интерференции волн де Бройля.

**С1.** Пусть частица переместилась на бесконечно малое расстояние  $\Delta s$  вдоль своей траектории. Свяжите изменение фазы  $\Delta\phi$  ее волн де Бройля с изменением действия  $\Delta A$  и постоянной Планка. (0,6 б.)

**С2.** Вспомните задачу из части А, где частица движется из точки  $O$  в точку  $P$ . Пусть между двумя областями, вдоль их границы  $AB$ , установлена непрозрачная перегородка (рис.4). В ней есть небольшая щель  $CD$  шириной  $d$ , причем  $d \ll x_0 - x_1$  и  $d \ll x_1$ . Рассмотрим две крайние траектории  $OCP$  и  $ODP$ , причем  $OCP$  соответствует классической траектории, рассмотренной в части А. Найдите в первом приближении разность фаз  $\Delta\phi_{CD}$  между двумя траекториями. (1,2 б.)

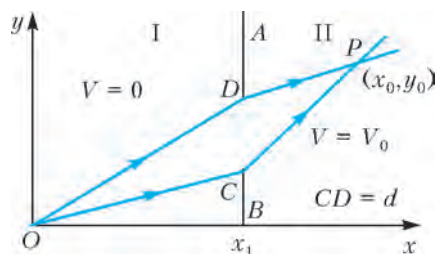


Рис.4

### Часть D. Интерференция волн материи

Электронная пушка, находящаяся в точке  $O$ , направляет коллимированный пучок электронов на узкую щель в точке  $F$  в непрозрачной перегородке  $A_1B_1$  (рис.5). Перегородка расположена на линии  $x = x_1$ , так что  $OFP$  — это прямая,  $P$  — это точка на экране при  $x = x_0$ . Скорость в области I равна  $v_1 = 2,0000 \cdot 10^7$  м/с, угол  $\theta = 10,0000^\circ$ .

Потенциал в области II выбран так, что скорость  $v_2 = 1,9900 \cdot 10^7$  м/с. Расстояние  $x_0 - x_1$  равно 250,00 мм. Взаимодействием между электронами пренебречь.

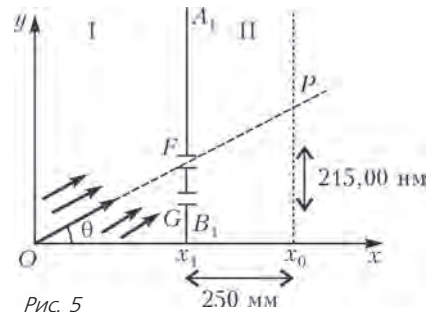


Рис.5

**D1.** Рассчитайте ускоряющий потенциал  $U_1$ , считая, что электроны ускоряются в точке  $O$  из состояния покоя. (0,3 б.)

**D2.** В перегородке  $A_1B_1$  ниже щели  $F$  на 215,00 нм ( $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ ) проделали еще одну такую же щель  $G$ . Разность фаз между волнами де Бройля, пришедшими в точку  $P$  через щели  $F$  и  $G$ , может быть представлена как  $2\pi\beta$ . Вычислите  $\beta$ . (0,8 б.)

**D3.** Чему равно наименьшее расстояние  $\Delta y$  от точки  $P$  до точки на экране, в которой вероятность обнаружить электрон равна нулю? (1,2 б.)

*Примечание:*  $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta$ .

**D4.** Луч имеет квадратное сечение  $500 \times 500$  нм, длина установки 2 м. Какова минимальная плотность потока электронов  $I_{\min}$ , если в среднем в установке в любой момент времени имеется хотя бы один электрон? Плотность потока электронов — это количество электронов, проходящих в единицу времени через единичную площадку по нормали к ней. (0,4 б.)

### Задача 3. Конструирование ядерного реактора (10 баллов)

В природном уране, в соединении  $\text{UO}_2$ , только 0,720% атомов урана являются атомами изотопа  $^{235}\text{U}$ . Если ядро  $^{235}\text{U}$  поглощает нейтрон, то оно практически мгновенно делится, испуская при этом 2–3 нейтрона, имеющих большую кинетическую энергию. Вероятность деления будет возрастать, если нейтрон, вызывающий реакцию деления, обладает малой кинетической энергией. Таким образом, уменьшение кинетической энергии нейтронов, появившихся в результате деления, может привести к возникновению цепной ядерной реакции. Эта идея является основой работы ядерных реакторов — ЯР.

Типичный ЯР представляет собой цилиндрический сосуд высотой  $H$  и радиусом  $R$ , заполненный веществом, которое называется замедлителем (рис.6). Цилиндрические трубки,



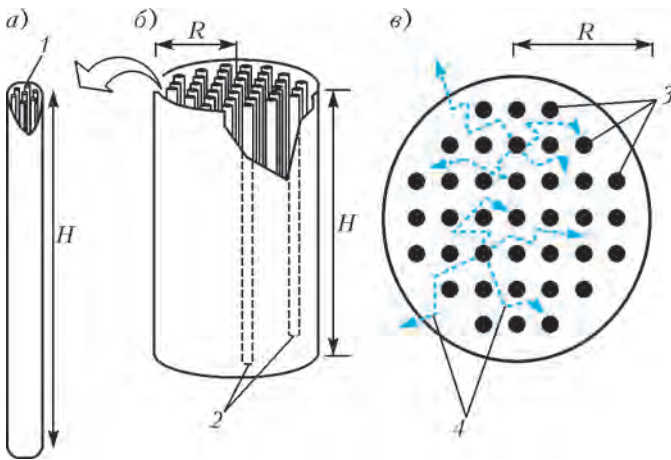


Рис.6. Схема ядерного реактора (ЯР): а) увеличенное изображение топливного канала (1 – топливные стержни); б) изображение ЯР (2 – топливные каналы); в) вид сверху (3 – квадратная сетка ядерных каналов, 4 – типичные траектории нейтронов). Показаны только те элементы реактора, которые имеют отношение к данной задаче (например, не показаны управляющие стержни и охладитель)

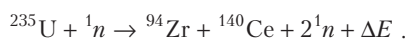
называемые топливными каналами, каждый из которых состоит из набора цилиндрических топливных стержней природного  $UO_2$  высотой  $H$ , расположены параллельно оси цилиндра в вершинах квадратной сетки. Нейтроны, возникшие в процессе деления, выходят из топливного канала, сталкиваются с замедлителем, теряют энергию и попадают в другие топливные каналы уже с низкой энергией и приводят к делению других ядер. Теплота, выделившаяся в результате деления в топливных стержнях, переносится охлаждающей жидкостью, текущей вдоль стержней.

В данной задаче вам необходимо изучить некоторые физические явления, проходящие в (А) топливных стержнях, (В) замедлителе и (С) ядерном реакторе цилиндрической формы.

### Часть А. Топливный стержень

Данные для  $UO_2$ : молярная масса  $M = 0,270 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$ , плотность  $\rho = 1,060 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ , теплопроводность  $\lambda = 3,280 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ , температура плавления  $T_{\text{пл}} = 3,138 \cdot 10^3 \text{ К}$ .

**A1.** Рассмотрим следующую реакцию деления – неподвижное ядро  $^{235}\text{U}$  после поглощения нейтрона с пренебрежимо малой кинетической энергией распадается по схеме



Оцените полную энергию  $\Delta E$  (в МэВ), выделяющуюся в реакции. Массы частиц равны:  $m(^{235}\text{U}) = 235,044 \text{ а.е.м.}$ ,  $m(^{94}\text{Zr}) = 93,9063 \text{ а.е.м.}$ ,  $m(^{140}\text{Ce}) = 139,905 \text{ а.е.м.}$ ,  $m(^1_0\text{n}) = 1,00876 \text{ а.е.м.}$ , где  $1 \text{ а.е.м.} = 931,502 \text{ МэВ}$ . Не обращайте внимания на несохранение электрического заряда в данном уравнении. (0,8 б.)

**A2.** Оцените  $N$  – число атомов  $^{235}\text{U}$  в единице объема природного  $UO_2$ . (0,5 б.)

**A3.** Предположим, что поток нейтронов в ядерном топливе является однородным и равным  $\phi = 2,000 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Сечение реакции деления (эффективная площадь ядра-мишени) ядра  $^{235}\text{U}$  равно  $\sigma = 5,400 \cdot 10^{-26} \text{ м}^2$ . Считая, что 80,00% выделяющейся при делении энергии превращается в

тепловую, найдите тепловую мощность  $Q$  (в  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3}$ ), выделяющуюся в единице объема ядерного топлива ( $1 \text{ МэВ} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ). (1,2 б.)

**A4.** Установившаяся разность температур между центром ( $T_{\text{ц}}$ ) и поверхностью ( $T_{\text{п}}$ ) топливного стержня может быть описана формулой  $T_{\text{ц}} - T_{\text{п}} = kF(Q, a, \lambda)$ , где  $k = 1/4$  – безразмерная постоянная,  $a$  – радиус стержня,  $\lambda$  – теплопроводность  $UO_2$ . Используя метод размерностей, получите выражение для функции  $F(Q, a, \lambda)$ . (0,5 б.)

**A5.** Максимально допустимая температура охладителя равна  $5,770 \cdot 10^2 \text{ К}$ . Рассчитайте максимально возможный радиус  $a_{\text{max}}$  топливного стержня. (1 б.)

### Часть В. Замедлитель

Рассмотрим абсолютно упругое столкновение на плоскости двух частиц: нейтрона массой 1 а.е.м. и частицы замедлителя массой  $A$  а.е.м. Считайте, что в лабораторной системе отсчета – ЛСО – все частицы замедлителя перед столкновениями находятся в состоянии покоя. Пусть  $\vec{v}_b$  и  $\vec{v}_a$  – скорости нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно. Обозначим  $\vec{v}_m$  скорость центра масс системы в ЛСО, а  $\theta$  – угол отклонения нейтрона в системе отсчета, связанной с центром масс – СОЦМ. Все сталкивающиеся частицы – нерелятивистские.

**B1.** На рисунке 7 схематически показан процесс столкновения в ЛСО, где  $\theta_n$  – угол отклонения нейтрона. Нарисуйте схематически процесс столкновения в СОЦМ. На этом рисунке укажите угол рассеяния  $\theta$ , а также скорости частиц для положений 1, 2 и 3 в СОЦМ, которые должны быть выражены через  $\vec{v}_b$ ,  $\vec{v}_a$  и  $\vec{v}_m$ . (1 б.)

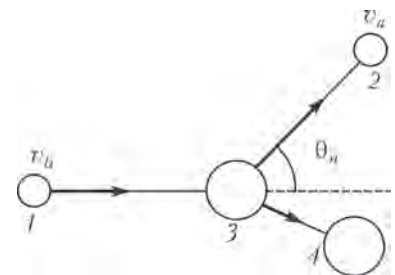


Рис. 7. Процесс столкновения в ЛСО: 1 – нейтрон до столкновения, 2 – нейтрон после столкновения, 3 – частица замедлителя до столкновения, 4 – частица замедлителя после столкновения

**B2.** В СОЦМ определите скорости нейтрона  $v$  и частицы замедлителя  $V$  после столкновения, выразив их через  $A$  и  $v_b$ . (1 б.)

**B3.** Получите выражение для зависимости  $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ , где  $E_b$  и  $E_a$  – кинетические энергии нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно, а  $\alpha = ((A-1)/(A+1))^2$ . (1 б.)

**B4.** Предположим, что вышеуказанное выражение справедливо для молекулы  $D_2O$  (20 а.е.м.). Вычислите максимально возможную долю потери энергии  $f = \frac{E_b - E_a}{E_b}$  нейтрона в замедлителе  $D_2O$ . (0,5 б.)

### Часть С. Ядерный реактор

Для работы ядерного реактора при любом постоянном потоке нейтронов  $\psi$  (в стабильном режиме) количество нейтронов, покидающих реактор, должно быть скомпенсировано числом нейтронов, вырабатываемых в ядерном процессе. Для реактора цилиндрической формы количество покидающих нейтронов в единицу времени равно  $k_1 \left( (2,405/R)^2 + (\pi/H)^2 \right) \psi$ , в то время как количество нейтронов, образуемых в ядерных реакциях в единицу времени, равно  $k_2 \psi$ . Константы  $k_1$  и  $k_2$  зависят от свойств материалов, из которого сделан ядерный реактор.

**С1.** Рассмотрите ядерный реактор, для которого  $k_1 = 1,021 \cdot 10^{-2}$  м и  $k_2 = 8,787 \cdot 10^{-3}$  м<sup>-1</sup>. Заметим, что для эффективного использования топлива количество улетающих нейтронов при работе в стационарном режиме должно быть минимально. Рассчитайте размеры ядерного реактора (высоту и радиус), при фиксированном его объеме, удовлетворяющие указанному условию. (1,5 б.)

**С2.** Топливные каналы расположены в узлах квадратной сетки, как показано на рисунке 6,в. Расстояние между ближайшими каналами равно 0,286 м, а радиус топливного канала  $3,617 \cdot 10^{-2}$  м. Оцените количество  $F$  топливных каналов в ядерном реакторе и массу  $M$  природного урана  $UO_2$ , необходимого для работы ядерного реактора в стационарном режиме. (1 б.)

Публикацию подготовили А.Воронов, А.Гуденко

## XXII Международная олимпиада «Туймаада». Математика

Международная олимпиада школьников «Туймаада» проводится в Якутии ежегодно, начиная с 1994 года. С самого начала эта олимпиада была задумана не только как международная (кроме школьников из разных регионов России, в разные годы в ней участвовали представители Румынии, Болгарии, Монголии и других стран), но и как многопредметная — в состав олимпиады входят соревнования по математике, физике, химии и информатике. В последние 17 лет олимпиада по математике в значительной степени составляется членами жюри Петербургской олимпиады школьников по математике; опытный читатель без труда заметит, с одной стороны, некоторое стилистическое родство двух олимпиад, а с другой — присущий международным математическим соревнованиям технический уклон.

Ниже приводятся задачи олимпиады и список призеров.

### Младшая лига

#### Первый день

**1.** Дано 100 различных вещественных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы  $10 \times 10$  так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, разность не была равна 1.

А.Голованов

**2.** Назовем натуральное число *забавным*, если сумма его цифр, увеличенная на 1, является делителем этого числа. Какое наибольшее количество подряд идущих натуральных чисел может оказаться забавными?

О.Подлипский

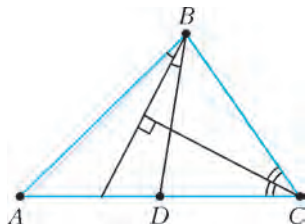


Рис. 1

**3.** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BD$  (рис.1). Биссектрисы углов  $ABD$  и  $ACB$  перпендикулярны. Найдите наибольшее возможное значение угла  $BAC$ .

С.Берлов

**4.** Докажите, что существует натуральное  $n$  такое, что в десятичной записи каждого из чисел  $\sqrt{n}$ ,  $\sqrt[3]{n}$ ,  $\sqrt[4]{n}$ , ...,  $\sqrt[19]{n}$  сразу после запятой стоят цифры 2015...

А.Голованов

#### Второй день

**5.** К натуральному числу прибавляют его наибольший собственный делитель, к получившемуся прибавляют его наибольший собственный делитель и т.д. Докажите, что после выполнения нескольких операций получится число, кратное  $3^{2000}$ .

А.Голованов

**6.** Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел  $(a_n)$ , такая что среди разностей  $a_{n+1} - a_n$  встречаются все натуральные числа ровно по одному разу, а среди разностей  $a_{n+2} - a_n$  встречаются только натуральные числа, большие 2015, причем тоже ровно по одному разу?

А.Голованов

**7.** Продолжение биссектрисы  $CK$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность треугольника в точке  $L$  (рис.2). Точка  $I$  — центр вписанной окружности. Оказалось, что  $IK = KL$ . Докажите, что  $CI = IL$ .

Д.Ширяев

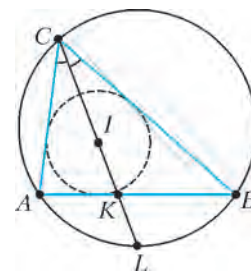


Рис. 2

**8.** Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба. На каждом из мудрецов красная, синяя или зеленая шляпа. Мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Мудрецы одновременно должны высказать предположение о цвете своей шляпы. Если хотя бы один из мудрецов угадал, они выиграли. Мудрецы имели возможность обсудить ситуацию до начала игры. Как им действовать, чтобы выиграть?

К.Кохась

### Старшая лига

#### Первый день

**1.** На футбольном поле тренировалось  $n$  футболистов — нападающих и вратарей. Всего на тренировке было забито  $k$  голов. Докажите, что после тренировки Фабио Капелло может так раздать игрокам номера от 1 до  $n$ , чтобы для любого гола разность между номерами нападающего и вратаря была не менее  $n - k$ .

С.Берлов

**2.** См. задачу 3 для младшей лиги.

**3.** Многочлен  $P(x, y)$  с вещественными коэффициентами таков, что  $P(x + 2y, x + y) = P(x, y)$ . Докажите, что для некоторого многочлена  $Q(t)$  имеет место равенство

$$P(x, y) = Q\left((x^2 - 2y^2)^2\right).$$

А.Голованов

**4.** Для каждого  $n$  представим число  $n!$  в виде  $ab^2$ , где  $a$  свободно от квадратов. Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  при всех достаточно больших  $n$  выполнено неравенство

$$2^{(1-\varepsilon)n} < a < 2^{(1+\varepsilon)n}.$$

М.Иванов

Второй день

5. См. задачу 5 для младшей лиги.

6. Даны целые числа  $0 \leq b \leq c \leq d \leq a$ , причем  $a > 14$ . Докажите, что не всякое натуральное число  $n$  можно записать в виде

$$n = x(ax + b) + y(ay + c) + z(az + d),$$

где  $x, y, z$  – некоторые целые числа.

К.Кохась

7. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $AB$ , точка  $O$  – центр описанной окружности. Оказалось, что  $R - r = OM$  (где  $R$  и  $r$  – соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ). Биссектриса

внешнего угла при вершине  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ , а биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $E$ . Найдите все возможные значения угла  $CED$ .

Д.Ширяев

8. На плоскости отмечено  $\frac{k(k+1)}{2} + 1$  точек, некоторые из которых соединили непересекающимися отрезками (в том числе ни одна из точек не лежит на отрезке, соединяющим другие точки). Оказалось, что плоскость разбилась на параллелограммы и бесконечную область. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено?

А.Кунавский, А.Полянский

## Призеры олимпиады

### Лучший результат:

Куликов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,  
Лучкин Вадим – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа».

### Лучший участник от Республики Саха (Якутия):

Тарабукин Иван – Якутск, Республиканский лицей.

### Лучший результат среди девушек:

Эверстова Аграфена – Якутск, Республиканский лицей.

### Самому юному участнику:

Андреев Максим – Якутск, школа 5.

### За кропотливое упорство:

Харитонова Елизавета – Владивосток, школа 23.

Публикацию подготовили А.Голованов, М.Иванов, К.Кохась

# XXII Международная олимпиада «Туймаада». Физика



В июле этого года в Якутске прошла XXII Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Участники олимпиады по физике соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри рас-

пределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к двум последним классам).

Российские и зарубежные школьники, желающие испытать свои силы на задачах такого уровня в следующем году, и их преподаватели могут согласовать организационные вопросы, связанные с участием в олимпиаде, с жюри по физике (fiztuy@mail.ru). Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут прислать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и будут опубликованы после олимпиады в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании такого методического пособия: А.В. Чудновский, С.Д. Варламов, М.Ю. Замятнин, В.В. Ефимов, Р.Е. Аванесян, Э.А. Хачатрян, А.Р. Зильберман. XXII Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие/под ред. А.В.Чудновского – М.-Якутск, 2015.



Торжественное открытие олимпиады

Ниже приводятся теоретические задачи старшей лиги и список дипломантов олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### Старшая лига

#### Задача 1. Бочка меда

В пустую цилиндрическую бочку массой  $m = 5$  кг и высотой  $H = 1$  м наливают мед с постоянным расходом  $\mu = 80$  г/с. Бочка имеет толстые однородные стенки, легкое тонкое дно и может вместить в себя до  $M = 40$  кг меда.

1) Найдите скорость  $v_0$  центра масс системы «бочка–мед» сразу после начала заполнения.

2) Через какое время  $t_0$  от начала заполнения скорость этого центра масс окажется минимальной по модулю?





Культурная программа олимпиады

### Задача 2. Диффузия

В двух горизонтальных цилиндрических сосудах площадью поперечного сечения  $S = 1 \text{ см}^2$  и объемом  $V = 1 \text{ л}$  каждый при одинаковых давлении  $p = 10 \text{ Па}$  и температуре  $T = 300 \text{ К}$  находятся различные газы: в первом – аргон  $^{40}_{18}\text{Ar}$ , а во втором – этан  $\text{C}_2\text{D}_2\text{T}_4$ . С одного из торцов в каждый сосуд вводят небольшое количество тех же газов, но с другим изотопным составом молекул: в первый – аргон  $^{36}_{18}\text{Ar}$ , а во второй – этан  $\text{C}_2\text{D}_6$ . Через некоторые промежутки времени  $t_1$  и  $t_2$  вблизи противоположных торцов соответствующих сосудов будет достигнута концентрация примесных молекул, равная половине от той, которая установится через очень большое время.

1) Найдите отношение  $t_1/t_2$ .

2) Оцените по порядку величины значение  $t_1$ .

Молярные массы углерода и тяжелых изотопов водорода (дейтерия и трития) известны:  $M_C = 12 \text{ г/моль}$ ,  $M_D = 2 \text{ г/моль}$ ,  $M_T = 3 \text{ г/моль}$ . Плотности аргона и этана в жидком состоянии при низких температурах равны  $\rho_1 = 1400 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2 = 750 \text{ кг/м}^3$  соответственно.

### Задача 3. Точечный заряд и вращающийся диполь

Два точечных заряда  $+q$  и  $-q$  массой  $m$  каждый соединены коротким легким стержнем и свободно вращаются с периодом  $T$  вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему. В плоскости



Спортивные состязания участников олимпиады

вращения зарядов на большом расстоянии  $R$  от оси вращения закреплен точечный заряд  $Q$ . Считая относительные изменения скорости вращающихся зарядов малыми, найдите величину и направление средней за период силы  $F_0$ , действующей на неподвижный заряд.

*Указание.* При любых  $n$  и  $x$ , удовлетворяющих условию  $nx \ll 1$ , справедливо приближенное равенство

$$(1+x)^n \approx 1+nx.$$

### Задача 4. Коварный конденсатор

В идеальном колебательном контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности, происходят собственные незатухающие колебания. Пластины конденсатора равномерно и очень медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в  $n$  раз. Во сколько раз изменилась при этом энергия колебаний?

### Задача 5. Ускорение изображения в линзе

Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$  ползет с постоянным ускорением  $a$  маленький жучок, в начальный момент времени покоившийся в оптическом центре линзы. С какой скоростью  $v$  и с каким ускорением  $w$  движется изображение жучка в тот момент, когда расстояние между жучком и его действительным изображением минимально?

## Дипломанты олимпиады

### по младшей лиге

участник	диплом
Дмитрий Садыков (Россия, Казань)	I
Кирилл Миронов (Россия, Саранск)	I
Игорь Сивцев (Россия, Якутия)	I
Шынгыс Айтказинов (Казахстан)	I
Айвар Абрашулы (Казахстан)	II
Андрей Хрестин (Россия, Саранск)	II
Моника-Кристина Добриною (Румыния)	II
Даниил Ворожейкин (Россия, Саранск)	II
Эдлет Увалиев (Казахстан)	III
Роман Клыта (Россия, Сергиев Посад)	III
Тимофей Торохов (Россия, Якутск)	III

### по старшей лиге

Максим Елисеев (Россия, Саранск)	I
Илья Зыков (Россия, Саранск)	I
Роберт-Юлиан Равену (Румыния)	II
Артем Егеров (Россия, Саранск)	II
Теодор Аксение (Румыния)	II
Михаил Овидиу Попа (Румыния)	II
Гордей Зикрацкий (Россия, Саранск)	II
Артем Ашимов (Казахстан)	III
Дмитрий Артамонов (Россия, Якутия)	III
Наурызбай Койшекенов (Казахстан)	III
Павел Герасименко (Россия, Якутия)	III
Виктория Захарова (Россия, Саранск)	III
Тимур Степанов (Россия, Якутия)	III

Публикацию подготовили А.Чудновский, Ю.Григорьев

## Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в пятьдесят второй раз проводит набор учащихся.

Эта школа была создана по инициативе академика И.М.Гельфанда в 1964 году. Многие годы И.М.Гельфанд возглавлял Научный совет школы.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2016 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих

удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено к сентябрю 2016 года), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали о ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

*Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)*

*Телефон: +7 (495) 939-39-30*

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на обще-школьном сайте ВЗМШ:

[www.vzms.ru](http://www.vzms.ru)

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

[vzms@yandex.ru](mailto:vzms@yandex.ru)

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2016 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2016 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:  
241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: <http://cdoosh.kirov.ru>

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ВЗМШ и условия вступительных контрольных работ.

### Отделение математики

Мы принимаем учиться на все курсы с 0 по 5 (что соответствует 6–11 классам общеобразовательной школы). Всю информацию о работе математического отделения вы можете получить на сайте отделения:

<http://www.math-vzms.org>

После зачисления в школу ученик получает пособия по программе ВЗМШ, абсолютное большинство которых написано специально для учащихся математического отделения ВЗМШ. Ученик изучает предложенные темы, решает задачи и выполняет по каждой теме контрольную работу, которая проверяется, рецензируется преподавателем школы и вместе со всеми замечаниями и советами отсылается ученику. За каждым учеником на все годы обучения закреплен один и тот же преподаватель, которому в случае необходимости всегда можно задать вопросы. Мы таким образом помогаем учиться заочно.

Кроме того, мы принимаем школьников и на групповую форму обучения – «Коллективный ученик». В этом случае несколько учащихся работают по нашим пособиям под руководством школьного учителя (обычно) и присылают в ВЗМШ одну коллективную работу по каждой теме. Прием в заочную школу на групповое обучение производится по заявлению руководителя группы (школьного учителя) без вступительной работы. Количество экземпляров пособий, которые высылаются в адрес группы «Коллективный ученик», определяется руководителем в соответствии с Договором о научно-педагогическом сотрудничестве, который школа, где работает группа, заключает с ВЗМШ.

Если вы хотите учиться индивидуально, то надо выполнить вступительную работу, условия которой представлены ниже. Решения задач, с которыми вам удалось справиться, нужно записать в обычной ученической тетради в клетку и выслать простой бандеролью (пожалуйста, не сворачивайте тетрадь в трубку!) вместе с заявлением о приеме в адрес школы. Вступительные работы и заявления принимаются также по электронной почте: [priem@math-vzms.org](mailto:priem@math-vzms.org). В этом случае работа должна быть оформлена в виде файла формата \*.doc или \*.pdf, можно также отсканировать текст работы и прикрепить его к заявлению о приеме.

Заявление о приеме пишется в свободной форме. Укажите: фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (сколько классов средней школы будет закончено к сентябрю очередного учебного года; нам было бы удобно

прочсть: «С 1-го сентября 2016 года я буду учиться в ... классе»), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о ВЗМШ (из интернета, из журналов «Квант», «Наука и жизнь», от друзей или из других источников); сообщите, пожалуйста, адрес своей электронной почты, если она имеется. Не забудьте указать, что вы поступаете на отделение математики.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2016 года.*

Во вступительной работе рядом с порядковым номером задачи в скобках указано, ученикам какого класса (имеется в виду тот класс, в котором вы предполагаете учиться с 1 сентября 2016 года) эта задача предназначается. Вы можете, если хотите, дополнительно решать задачи, адресованные более старшим классам. Не торопитесь, и если задачи не получаются, возвращайтесь к ним несколько раз. До 15 июня времени еще достаточно. Возможно, вы не сможете решить все задачи своего класса, тогда присылайте решения тех, которые сделать удалось. Не забудьте обосновать свои решения, «голый» ответ к задаче решением не считается.

Все подробности, связанные с порядком поступления, оплатой и процессом обучения, вы можете посмотреть на сайте отделения или задав вопросы по электронной почте или телефону.

Электронный почтовый ящик математического отделения: [priem@math-vzms.org](mailto:priem@math-vzms.org)

Телефон: +7 (495) 939-39-30

### Задачи

**1** (6–7). Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 2015? А 2016?

**2** (6–8). Привезли 100 одинаковых пар ботинок в магазин, где они перемешались. Сто человек купили по два ботинка, потом 25 из них пришли с жалобой, что ботинки непарные. Докажите, что есть еще хотя бы один покупатель, не дошедший до магазина и имеющий такую же жалобу.

**3** (6–10). Замостите плоскость квадратами, среди которых два одинаковых, а остальные все попарно различны.

**4** (6–11). Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов *A* и *B*, встретились в 70 км от *A* и продолжили двигаться с теми же скоростями. По прибытии в пункты назначения каждый отдохнул одно и то же время и отправился обратно с той же скоростью, что и раньше. Встретились велосипедисты в 90 км от *B*. Найдите расстояние *AB*.

**5** (8–10). Даны целые числа *m* и *n*, про которые известно, что  $23n = 19m$ . Докажите, что число  $n + 2m$  делится на 13.

**6** (8–10). На плоскости нарисованы несколько точек, все расстояния между которыми различны. Каждую точку соединили отрезком с ближайшей к ней точкой. Докажите, что полученные отрезки не пересекаются.

**7** (8–10). Найдите все натуральные числа *x* такие, что  $x^4 + x^2 + 1$  – простое число.

**8** (8–10). Предложите по крайней мере два разных способа с помощью циркуля и линейки (без делений) разделить заданный отрезок на три равные части.

**9** (8–11). На столе лежат 2016 спичек. Двое играющих снимают по очереди 1 или 2 спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто выигрывает: начинающий или его партнер и как он должен для этого играть?

**10** (8–11). Сумма диагоналей четырехугольника заключена между его полупериметром и периметром. Всегда ли верно это утверждение? Любой ответ нуждается в доказательстве!

**11** (8–11). При каком натуральном значении *a* число  $3a + 1$  делится на число  $a + 3$ ?



12 (9–11). Сумма натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{49}$  равна 999. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

### Отделение биологии

Зачисление на отделение проводится на конкурсной основе по результатам приведенной ниже вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для 8-классников длится 3 года, для 9-классников – 2 года.

Учащимся 8 классов необходимо решить задачи 1–3 и одну из задач 4 и 5, а 9-классникам – задачи 2,3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, – точный адрес соответствующей страницы).

Работу следует выполнить на русском языке в тетради; на обложке тетради укажите свою фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес с индексом, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Кроме этого, работу можно выполнить в электронном виде и выслать в файле формата \*.doc, \*.docx, \*.rtf, \*.txt или \*.odt на наш электронный адрес: [uchenikivzmsb@gmail.com](mailto:uchenikivzmsb@gmail.com)

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2016 года.*

#### Задачи

1. Представьте себе, что вам для ваших исследований нужно содержать животных в неволе. Ваша задача – свести к минимуму ущерб животным, который они будут получать от такого содержания, и обеспечить им максимально комфортное проживание. Также ваши животные должны находиться в таких условиях, чтобы они могли размножаться. В каких условиях вы бы содержали следующих животных: виноградная улитка, морской ангел, осьминог, аксолотль, среднеазиатская черепаха, зебровая амадина, перепелка, крыса, кролики, норки, макаки а) в условиях лабораторного вивария; б) в условиях зоопарка? Учтите, что в условиях зоопарка вы должны размещать животных таким образом, чтобы они были доступны для обзора посетителей.

2. Как вы думаете, зачем человеку нужны молочные зубы? Или это бессмысленный атавизм?

3. Какие свойства микроорганизмов можно изучать без микроскопа?

4. Как вы понимаете – за что присудили Нобелевскую премию по физиологии и медицине осенью 2015 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

5. Известно, что организмы бывают одноклеточные, многоклеточные и колониальные. Приведите как можно больше различий между этими организмами. Как отличить колониальность от истинной многоклеточности?

6. Какое открытие в области биологии кажется вам наиболее ожидаемым в настоящий момент? Попробуйте объяснить, почему именно выбранное вами открытие важно, какие перспективы оно открывает и почему оно не сделано до сих пор.

### Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие

в 2016 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0).

Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2016 года, полный почтовый адрес (с индексом), электронный адрес (если есть), телефон.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2016 года.*

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: [olphys@phys.problems.ru](mailto:olphys@phys.problems.ru)

Интернет-сайт: <http://phys.problems.ru>

#### Задачи

1. Найдите отношение объемов погруженной в воду части тела человека после выдоха в Мертвом море и после вдоха в пресной воде, если за счет вдоха объем тела человека увеличивается на 8%. Плотность соленой воды в Мертвом море  $\rho_c = 1,3 \text{ г/см}^3$ , плотность пресной воды  $\rho_n = 1,0 \text{ г/см}^3$ .

2. Сопротивление проволочного куба измеряют, присоединив контакты к вершинам, лежащим на одной из больших диагоналей. В какое максимальное число раз можно увеличить значение этого сопротивления, перекусив часть проволок?

3. При закаливании нагретой до  $t_d = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  стальной детали массой  $m = 80 \text{ кг}$  ее погружают в ванну с водой объемом  $V = 50 \text{ л}$  и температурой  $t_b = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Найдите, какая часть воды испарилась, если в конечном состоянии температура системы равна  $t = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Теплоемкостью ванны и теплообменом с внешней средой пренебречь. Удельная теплоемкость стали  $c_c = 460 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$ , воды  $c_b = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$ , удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2256 \text{ кДж/кг}$ , плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

4. Автомобиль и мотоцикл равномерно едут по пересекающимся дорогам (рис.1) Если машина выезжает из точки А, то она оказывается на перекрестке на  $\Delta t_1 = 1 \text{ мин}$  раньше мотоцикла, который одновременно начинает движение из точки В. Если автомобиль стартует из точки В, а мотоцикл – из точки А, то машина приезжает на перекресток на  $\Delta t_2 = 4 \text{ мин}$  раньше. Найдите кратчайшее расстояние между транспортными средствами во втором случае, если в первом оно равно  $d_1 = 100 \text{ м}$ .

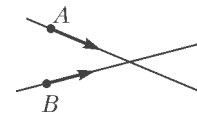


Рис. 1

5. В аквариум налита вода до уровня  $h = 40 \text{ см}$ . Над аквариумом может двигаться точечный источник света, описывая полуокружность радиусом  $R = 40 \text{ см}$  в плоскости, перпендикулярной поверхности воды. В той же плоскости на поверхности воды плавает спичка длиной  $l = 5 \text{ см}$ , середина которой совпадает с центром полуокружности. Найдите отношение длин теней от спички на дне аквариума при положениях источника света в верхней точке и на высоте  $R/2$  от поверхности воды. Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

6. На перегоне между станциями метро состав должен двигаться с постоянной скоростью  $v = 70 \text{ км/ч}$  в течение 80% времени. Какой максимальной скорости мог достичь поезд, если машинист забыл отключить ускорение при разгоне, но впоследствии смог привести поезд на станцию

точно по расписанию? При разгоне и торможении состав движется равноускоренно.

7. Автомобиль сначала разгоняется с постоянным ускорением  $a_1$ , а затем тормозит с постоянным ускорением  $a_2$ . Найдите, через какое время после начала торможения средняя скорость автомобиля достигнет максимума, если при ее расчете учитываются значения скорости за предшествующий промежуток времени  $\Delta t$ . На сколько будут отличаться максимальные значения мгновенной и средней скорости машины?

8. Правильный  $n$ -угольник из проволоки подвешен на нити за одну из своих вершин. В некоторый момент отламывается одна из сторон  $n$ -угольника, примыкающая к этой вершине. На какой угол повернется оставшаяся часть после установления равновесия?

9. Четыре параллельные пластины площадью  $S$  каждая расположены на равном расстоянии  $d$  друг от друга (рис.2). Крайние пластины соединены проводником. Источник постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  подключили сначала к внутренним пластинам. Через некоторое время один из контактов переключили на ближайшую крайнюю пластину. Найдите величину заряда, который после этого установится на каждой из пластин.

10. Магнитное поле занимает область, ограниченную полу-



Рис. 2

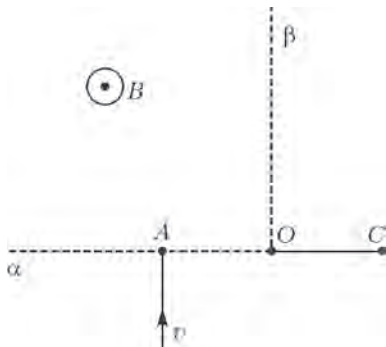


Рис. 3

плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , которые пересекаются под прямым углом (рис.3). Полуплоскости и индукция поля  $B$  перпендикулярны плоскости рисунка. Электрон влетает в поле в точке  $A$  со скоростью  $v$  и при последующем движении пролетает через точку  $C$ , причем известно, что  $AO = OC$ . Найдите путь, пройденный электроном в области, занятой магнитным полем. Масса электрона  $m_e$ , заряд  $e$ , скорость  $v$  лежит в плоскости рисунка.

### Отделение филологии

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и

пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

**Внимание!** На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2016 года.*

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: [filologyvzmsh@mail.ru](mailto:filologyvzmsh@mail.ru)

### Вопросы

1. Прочитайте следующие строки из комедии А.С.Грибоедова «Горе от ума»:

*Чацкий: Да из чего, скажи, беснуется вы столько?*

*Репетилов: Шумим, братец, шумим...*

*Чацкий: Шумите вы – и только?*

Попробуйте прокомментировать эту сцену в 3-х аспектах:

- историческом (существование каких актуальных для того времени мнений, событий, организаций... вдохновили автора на ее создание?),

- литературоведческом (какова авторская идея, какие художественные средства и приемы помогают драматургу донести до читателя и зрителя свою точку зрения, свое отношение?),

- лингвистическом (как автор использует СЛОВО для решения поставленной перед собой художественной задачи?).

2. Представьте, что вы – журналист известного российского издания. Возьмите интервью у знаменитости: напишите, с кем вы хотели бы побеседовать, какие вопросы вы бы задали и (если внимательно следите за его/ее судьбой и карьерой) какие ответы, вам кажется, могли бы получить?

3. Исправьте ошибки, которые допущены в приведенных ниже предложениях:

- *С этим положением можно согласиться только скрипя сердцем.*

- *Более худшего примера не привести.*

- *Ветерану хотелось слов без фальши.*

- *Автор убеждает, что, познавая культуру другого народа, посещение музеев не будет иметь особого смысла.*

4. Перед вами таблица из двух столбцов, содержащая русские слова, в некоторых случаях вместо слов проставлены знаки вопроса:

точка	?
?	иногда
?	краткий
длинный	долгий
земляк	?
?	часы
территория	?
?	вечный

- Заполните пропуски. Поясните ваше решение.

- Попробуйте предложить название для каждого из столбцов таблицы.

### Отделение экономики

Вы хотите научиться разбираться в экономике? Узнать изнутри работу маркетологов, менеджеров, банкиров, предпринимателей? Тогда эта информация для вас.

Обучение на экономическом отделении заочное, все учебные материалы школьники получают через интернет. Учиться на экономическом отделении могут те, кто в 2016 году закончит 7 (или более старший) класс, срок обучения 1 год.

Программа экономического отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Это может стать хорошей основой для дальнейшего изучения предпринимательства и менеджмента, бухгалтерского учета и финансов, мировой экономики – профессия экономиста требует широких знаний.

Учась на экономическом отделении, вы сможете заочно познакомиться со студентами, выпускниками и преподавателями Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, узнаете о разнообразных замечательных профессиях в экономике, одну из которых, возможно, вы выберете для себя в будущем.

Для поступления на отделение вам нужно выполнить задание приведенной ниже вступительной работы.

### Задание

Малый бизнес в России еще недостаточно развит, например, по сравнению со многими европейскими странами или США, но он является очень важной частью рыночной экономики. В связи с этим, создание своей небольшой компании в России для многих молодых людей является еще неизведанным и очень интересным проектом. Может быть, и вы мечтаете реализовать свою бизнес-идею, когда закончите высшее учебное заведение? Сейчас уже можно приступить к саморазвитию в данной области.

В этом году мы предлагаем вам порассуждать над высказываниями семьи медведей-бизнесменов из мультфильма «Эрнест и Селестина» (2012).



Медведица – владелица магазина, где продают зубы.  
Медведь – хозяин лавки со сладостями.  
Медвежонок Лион – их маленький сын.

### За ужином

*Медведица: Тебе добавить еще горошка, солнышко?*

*Медвежонок: Нет, хочу конфет!*

*Медведица: Лион... только не начинай. Мы тебе уже сто раз объясняли, что конфеты кушать тебе нельзя!*

*Медвежонок: Почему??*

*Медведь: Это, мой мальчик, в интересах торговли. На одной стороне улицы папа портит зубки...*

*Медведица: ... а на другой мама гнилые зубки заменяет.*

*Медведь: А когда ты вырастешь, оба дела перейдут к тебе. Не одно состояние, а целых два, мальчик мой!! Ха!*

*Медведица: Если, конечно, будешь улыбаться клиентам...*

*Медведь: Как говорил мой старик, улыбку красят здоровые зубы.*



*Медведица: Все просто: если хочешь заработать, надо чтобы от сахара портились чужие зубы, а не твои. Понятно?*

*Медвежонок: Угу... (вздыхает)... да.*

### Вопросы

Напишите краткое рассуждение, в котором ответьте на следующие вопросы:

1. Какие цели, на ваш взгляд, ставит или должен ставить перед собой владелец малого бизнеса?

2. Какие цели ставят перед собой Медведь и Медведица из мультфильма? Как бы вы охарактеризовали их стратегию ведения малого бизнеса?

3. Давно ли существует бизнес у семьи Медведей? Долго ли они еще планируют заниматься своим бизнесом?

4. Убедили ли родители Лиона, что ему вредно есть конфеты? Как вы думаете, почему да или почему нет?

Ответы присылайте по электронной почте: [zadanie@econ4all.ru](mailto:zadanie@econ4all.ru) или обычным письмом. В независимости от того, как вы присылаете ответ, обязательно укажите полный почтовый адрес и индекс, фамилию, имя, отчество и класс (в котором будете учиться осенью 2016 году). Озаглавьте письмо: «Экономика, вступительное задание-2016».

*Срок отправки вступительной работы – до 1 сентября 2016 года.*

Наши адреса в интернете:

<http://econ4all.ru>, [http://vk.com/econ4all\\_group](http://vk.com/econ4all_group)

### Отделение истории

Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом ВЗМШ.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одним из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупинцы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические



таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Приведенное ниже задание вступительной работы нужно выполнить на двойном листе бумаги.

*Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2016 года.*

#### *Задание*

#### **1. Отгадайте, кто это**

- Русский промышленник, ситцевый магнат, меценат.
- Его жена и друг, Вера Николаевна, – урожденная Мамонтова.
- Молодой купец с гидом и картой объехал все европейские музеи и сделался тонким знатоком живописи.
- В 24 года основал в своем родовом доме частную галерею русской живописи.
- В 60 лет передал свою галерею в дар Москве.
- Из всех современных ему художников предпочитал передвижников.
- Мечтал найти иконы Рублева, но удача улыбнулась другому коллекционеру.
- Стал первым директором основанного им музея, тратил на него все свои сбережения, но из скромности никогда не являлся на собственные юбилеи.
- Совершенно бескорыстен. Его бумажник всегда был открыт для нуждающихся.
- С художниками никогда не торговался. Заказывая картины, платил сполна.
- Его именем назван национальный музей и станция метро в Москве.
- Его портрет работы Репина украшает залы созданного им музея.

## **Заочной физико-технической школе при МФТИ – 50 лет**

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 95 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое и общее руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет).

Обучение в школе ведется по трем предметам научно-технической направленности – физике, математике и информатике. В 8–9 классах изучаются только физика и математика. В 10–11 классах к ним добавляется предмет «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика). Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два или три (в 10 и 11 классах) предмета.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2016/17 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

• Его последние слова родственникам: «Берегите галерею».

**2. Опишите**, не более чем в 7 предложениях, политический портрет второго президента России.

#### **Для старшеклассников, готовящихся сдавать ЕГЭ по обществознанию**

В 2007 году на отделении «История» открылся курс «Обществознание». Обществознание – это свод общественных дисциплин, изучающих все стороны деятельности человека. Некоторые преподаватели называют его винегретом. Вполне удачное сравнение. Как винегрет – составное блюдо, так и обществознание состоит из разных дисциплин. Перемешиваясь, дополняя друг друга, они создают цельную картину общества.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ. Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям будут направляться оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 15 июня 2016 года*. В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), e-mail, класс, в котором будете учиться с 1 сентября 2016 года.

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (отделение истории, обществознания) или на адрес электронной почты: [vzms@yandex.ru](mailto:vzms@yandex.ru)

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

#### **Заочное отделение (индивидуальное заочное обучение)**

*Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам. Полная программа обучения рассчитана на 4 года с 8-го по 11-й классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике и информатике, а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и по 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ: <http://www.school.mipt.ru>. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

*Срок отправки решений вступительного задания – не позднее 1 марта 2016 года.*

Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение Приемной комиссии будет выслано в июле 2016 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте на адрес ЗФТШ: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в заданиях. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой* бандеролью. На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу (можно скачать с сайта ЗФТШ):

Л.№																		
№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ	
Ф																		
М																		
И																		

(таблица заполняется методистом ЗФТШ)

1. Республика, край, область *Костромская область*
2. Фамилия, имя, отчество *Чистякова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь *восьмой*
4. Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер
5. Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)
  - физика
  - математика
  - информатика
6. Номер школы *43*
7. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования) *лицей*
8. Ф.И.О. учителей:
  - по физике *Попов Василий Игоревич*
  - по математике *Баландин Петр Алексеевич*
  - по информатике *Деева Ирина Ивановна*
9. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail *654041 г. Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru, тел.: (09422) 234-56-67*
10. Адрес школы и телефон, факс, e-mail *654041 г. Новокузнецк ул. Циолковского, д.65, тел.: (3843) 35-19-72, e-mail: must@yandex.ru*
11. Как вы узнали о ЗФТШ?
  - от учителя
  - от друзей
  - из журнала «Потенциал»
  - из журнала «Квант»
  - из интернета
  - другие источники

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше *наберите на компьютере и распечатайте*.

Для получения ответа на вступительное задание и для

отправки вам первых заданий обязательно вложите в тетрадь два одинаковых бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

**Очно-заочное отделение** (*обучение в факультативных группах*)

Тел./факс: (498) 744-63-51, e-mail: fakultativ@mipt.ru, zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя или тремя преподавателями* – физики, математики и информатики, в отдельных случаях разрешается обучение только по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «Очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным предметам), *адрес, телефон, факс и e-mail школы*. Заявление и обычный конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 2016 года* на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»). Адрес ЗФТШ: 141700 Московская область, г.Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, в течение учебного года будут получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.

**Очное отделение** (*обучение в вечерних консультационных пунктах*)

Тел.: (499) 755-55-80, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в сентябре. Обучение ведется по трем предметам (информатика – по желанию учащегося).

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2016», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце февраля или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

Для учащихся 8–11 классов работает субботний online-лекторий по физике и математике по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ: <http://www.school.mipt.ru>

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс,

а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам. Свидетельство об окончании ЗФТШ учитывается при поступлении в МФТИ.

Обучение в ЗФТШ бесплатное. С 2015/16 учебного года деятельность ЗФТШ финансово поддерживается Фондом развития МФТИ. Этот фонд основан выпускниками МФТИ для поддержки приоритетных проектов родного института и является фондом целевого капитала. Подробную информацию о деятельности Фонда вы можете узнать на сайте:

<http://mipt.ru/alumni/fund/>

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желаящим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д.36, ГСП, УЗФТШ. Тел: 8-(10-38-044)424-30-25, 8-(10-38-044)422-95-64, сайт: [www.mfti.in.ua](http://www.mfti.in.ua), e-mail: [ftsch@imp.kiev.ua](mailto:ftsch@imp.kiev.ua)

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях. Для справок e-mail: [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru), тел./факс: (495) 408-51-45, (498) 744-63-51.

Ниже приводятся задачи вступительных работ по физике, математике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), и максимальные баллы приводятся в таблице (номера классов указаны на текущий 2015/16 учебный год):

Номера задач

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1-5	6-10	9-13	11-16
Математика	1-5	3-8	7-13	9-15
Информатика			1-5	1-7

Максимальные баллы

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	30
Математика	25	33	37	37
Информатика			10	16

### Физика

1. На поверхности воды в озере расположен источник коротких звуковых сигналов. Приемник звуковых сигналов расположен на  $h = 30$  м ниже источника на одной с ним вертикали. Отраженный от плоского дна звуковой сигнал регистрируется приемником через  $T = 60$  мс после его отправки. Определите глубину озера в этом месте. Скорость звука в воде принять равной  $v = 1500$  м/с.

2. Антон спускался на эскалаторе в метро. В момент когда ему оставалось проехать четверть длины эскалатора, он решил возвратиться к верхней точке эскалатора. Антон может бежать относительно эскалатора со скоростью  $v = 3$  м/с. Какой способ предпочтительнее: спуститься вниз на «своем» эскалаторе и затем подниматься вверх по соседнему (он поднимает пассажиров наверх) или сразу подниматься вверх? Скорость каждого эскалатора  $v_1 = 1$  м/с. Временем перехода с одного эскалатора на другой пренебречь.

3. Масса стеклянной банки, наполненной маслом наполовину (по объему), равна  $m_1 = 1,5$  кг. Для полного заполнения банки в нее долили воду массой  $m_2 = 1,5$  кг. Определите массу пустой банки. Плотность масла  $\rho_m = 800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

4. В тонкостенный сосуд с вертикальными стенками высотой  $H = 27$  см налиты равные массы воды и масла, полностью заполняющие сосуд. Определите гидростатическое давление на расстоянии  $h = 5$  см от дна сосуда (внешнее давление не учитывать). Жидкости не смешиваются. Плотность масла  $\rho_m = 800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

5. В широкий сосуд с водой вертикально установлена длинная трубка, площадь поперечного сечения которой  $S = 2$  см<sup>2</sup>. Нижний конец трубки находится на  $l = 10$  см ниже уровня воды. Какую максимальную массу масла можно налить в трубку, чтобы масло не выливалось из нее через нижнее отверстие? Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

6. Однородный стержень длиной  $L = 1,2$  м лежит на упоре (см. рисунок). Для удержания стержня в горизонтальном положении нужно давить с силой  $F_1 = 200$  Н на ее короткий конец либо действовать с направленной вертикально вверх силой  $F_2 = 100$  Н на ее длинный конец. Определите массу стержня и место расположения точки упора.



7. Пустая пластиковая коробочка плавает в воде, погружившись на  $2/3$  своего объема. После того как в нее положили кусочек металла массой  $m = 10$  г, она осталась на плаву, погружившись на  $3/4$  своего объема. Определите массу коробочки. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

8. В батарее водяного отопления вода поступает при температуре  $t_1 = 80$  °С по трубе площадью поперечного сечения  $S = 500$  мм<sup>2</sup> со скоростью  $v = 1,2$  м/с, а выходит из батареи, имея температуру  $t_2 = 40$  °С. Какое количество теплоты получает отапливаемое помещение в течение суток? Удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг·°С).

9. В медный сосуд массой  $m_1$ , нагретый до температуры  $t_1 = 350$  °С, положили лед массой  $m_2 = 600$  г при температуре  $t_2 = -10$  °С. После установления теплового равновесия в сосуде оказалось  $m_3 = 550$  г льда, смешанного с водой. Определите массу сосуда  $m_1$ . Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость льда  $c_l = 2100$  Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда  $\lambda_l = 3,2 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость меди  $c_m = 390$  Дж/(кг·°С).

10. На контакты, делящие длину однородного проволочного кольца в отношении 1:2, подается некоторое постоянное напряжение  $U$ . При этом в кольце выделяется мощность  $P_1 = 72$  Вт. Какая мощность выделялась бы в кольце при том же напряжении, если бы контакты были расположены по диаметру кольца?

11. Если из некоторой точки, расположенной на высоте  $h$  над землей, бросить горизонтально со скоростью  $v_0$  небольшое тело, то оно упадет на землю через время  $t_1 = 1$  с. Если с той же скоростью тело бросить вертикально вверх, то оно упадет на землю через время  $t_2 = 2$  с. Определите скорость  $v_0$ , высоту  $h$  и дальность полета по горизонтали  $l$  в первом опыте. Сопротивление воздуха не учитывать, считать  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

12. Через легкий блок с неподвижной осью перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены небольшие грузы массами  $m_1 = 0,4$  кг и  $m_2 = 0,6$  кг. В начальный момент грузы удерживаются на одной высоте, затем легкому грузу сообщают направленную вертикально вниз скорость  $v_0 = 4$  м/с. Через какое время грузы опять окажутся на одной высоте? Сопротивление воздуха не учитывать, считать  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



13. На гладкой горизонтальной поверхности расположены два бруска массами  $m_1 = 0,9$  кг и  $m_2 = 1,6$  кг, соединенные легкой пружиной жесткостью  $k = 20$  Н/м. Сначала бруски удерживают так, что пружина сжата на  $l = 10$  см. Затем отпускают первый брусок, а в тот момент когда пружина становится недеформированной, отпускают и второй брусок. Найдите максимальное ускорение (по модулю) второго бруска в процессе дальнейшего движения.

14. На дне цилиндра, заполненного воздухом при нормальных условиях, лежит шарик радиусом  $r = 2$  см и массой  $m = 5$  г. Во сколько раз нужно увеличить давление воздуха, чтобы шарик мог взлететь? Воздух считать идеальным газом, его температура поддерживается постоянной.

15. Один моль идеального одноатомного газа сначала нагревается при постоянном давлении из начального состояния с температурой  $T_1 = 300$  К, а затем при постоянном объеме переводится в состояние с температурой  $T_2 = 400$  К. Оказалось, что за время всего процесса газу передано количество теплоты  $Q = 4000$  Дж. Во сколько раз изменился объем, занимаемый газом?

16. Два маленьких одинаковых по размеру заряженных проводящих шарика, находящихся друг от друга на расстоянии  $l = 20$  см, отталкиваются с силой  $F_1 = 3$  мН. После того как шарики были приведены в соприкосновение и затем разведены на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой  $F_2 = 4$  мН. Во сколько раз отличаются начальные заряды шариков?

**Математика**

1 (4 балла). В записи  $9 \cdot 6 + 14 : 2 + 2 : 3 + 7 = 22$  расставьте две пары скобок так, чтобы получилось верное равенство.

2 (4 б.). Биссектриса внешнего угла при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  параллельна его стороне  $BC$ . Верно ли, что треугольник  $ABC$  равнобедренный? Ответ обоснуйте.

3 (4 б.). Маша, помогая бабушке на даче, прополола три одинаковые грядки с клубникой. На первую и вторую грядки Маша потратила 58 мин, а на первую и третью – 48 мин. За какое время были прополоты все три грядки, если третью грядку Маша пропалывала с той же скоростью, как первую и вторую в среднем?

4 (7 б.). а) Постройте график функции

$$y = \frac{x^3 - 9x}{(x - 3)(x + 3)}$$

б) При каких значениях  $k$  прямая  $y = kx - 5$  не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

5 (6 б.). Прямая, проходящая через вершину  $P$  треугольника  $PQR$ , перпендикулярна биссектрисе его угла  $Q$  и пересекает прямую  $QR$  в точке  $A$ . Прямая, проходящая через вершину  $R$  треугольника, перпендикулярна той же самой биссектрисе и пересекает прямую  $PQ$  в точке  $C$ . Найдите  $QR$ , если  $PQ = 6$ ,  $AR = 2$ .

6 (4 б.). Сократите дробь  $\frac{a-b}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$ .

7 (6 б.). Из пункта круговой трассы выехал мотоцикл, а через 40 мин следом за ним отправился автомобиль. Через 2 ч автомобиль догнал мотоцикл в первый раз, а еще через 2,5 ч – во второй раз. Определите скорость мотоцикла, если длина трассы 50 км.

8 (6 б.). В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $15^\circ$ . Из вершины прямого угла  $C$  проведены высота  $CH$  и медиана  $CM$ . Найдите отношения  $CH : AB$  и  $MH : BC$ .

9 (4 б.). Решите неравенство

$$x^2 - 2x + |6x - 30| \leq 15$$

10 (5 б.). При каком значении параметра  $a$  сумма квадра-

тов корней уравнения  $x^2 + (2a - 5)x + (a^2 - 5a + 6) = 0$  минимальна?

11 (6 б.). Количество кустов смородины в саду в 4 раза больше количества кустов жимолости, а количество кустов крыжовника кратно количеству кустов жимолости. Если число кустов крыжовника увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем кустов смородины. Сколько всего кустов в саду, если известно, что их не менее 90?

12 (6 б.). Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 29.

13 (4 б.). Решите уравнение

$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$$

14 (5 б.). Найдите  $\sin^2 2\alpha$ , если

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 8$$

15 (7 б.). Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна  $\frac{14}{3}$  а сумма их квадратов равна  $\frac{84}{3}$ . Найдите первый член этой прогрессии.

**Информатика**

1 (1 балл). Четверо ребят играли в футбол во дворе. Кто-то разбил окно. Хозяйка спросила:

– Кто разбил окно?

Сереза сказал:

– Окно разбил или Юра, или Миша.

Юра сказал:

– Я окно не разбивал.

Игорь сказал:

– Это сделал Миша.

А Миша сказал:

– Игорь ошибается.

Трое ребят всегда говорят правду, а что говорит четвертый – неизвестно. Кто разбил окно?

2 (3 б.). Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 26-символьный алфавит) и двух десятичных цифр, одновременно не равных нулю. Сколько различных индексов можно построить?

3 (3 б.). Сколько записей в нижеследующем фрагменте экзаменационной ведомости удовлетворяют условию «(Пол='м' И Физика > 3) ИЛИ Алгебра = 5»:

Фамилия	Пол	Алгебра	Химия	Физика	История
Акченов	м	5	4	5	3
Вороши	м	3	5	4	5
Григорчук	ж	5	5	4	5
Роднип	м	4	5	3	5
Сергеенко	ж	4	3	4	4
Черепанов	м	3	2	5	3

4 (2 б.). У исполнителя Множик две команды, которым присвоены номера:

1. Умножь на 2,

2. Умножь на 3.

Первая из них увеличивает число на экране в 2 раза, вторая – утраивает его. Программа для Множика – это последовательность команд. Сколько различных чисел можно получить из числа 13 при помощи программы, содержащей ровно 6 команд? Ответ обоснуйте.

5 (2 б.). Исполнитель Черепашка перемещается на экране компьютера, оставляя след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существуют две команды:

Вперед  $n$  ( $n$  – целое число) – вызывает передвижение Черепашки на  $n$  шагов в направлении движения.

Направо  $m$  ( $m$  – целое число) – вызывает изменение направления движения на  $m$  градусов по часовой стрелке.

Запись Повтори  $k$  [Команда1 Команда2] означает, что последовательность команд в скобках повторится  $k$  раз. Напишите программу для данного исполнителя, которая

приведет к появлению на экране правильного шестиугольника.

6 (2 б.). Какие из перечисленных ниже имен ИРИНА, АРТЕМ, СТЕПАН, МАРИЯ

удовлетворяют условию

– (последняя буква гласная → первая буква согласная) & вторая буква согласная?

Ответ обоснуйте.

7 (3 б.). Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа  $13AC_{16}$ ,  $E8_{16}$ ? Ноль называется значащим, если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа. Приведите решение задачи.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 4)

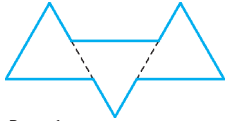


Рис. 1

1. На рисунке 1 изображен девятиугольник, который разрезан пунктирными линиями на три треугольника.
2. Да, достаточно открыть крайнюю шкатулку.

Если шкатулка с бриллиантом лежит не с краю, то на двух соседних с ней шкатулках написано верное утверждение, что противоречит условию. Значит, бриллиант в одной из двух крайних шкатулок. Если открыть одну из них, то либо мы увидим в ней бриллиант, либо узнаем, что бриллиант в другой шкатулке.

3. Барон Мюнхгаузен явно что-то напутал – описанная им ситуация невозможна. В самом деле, возьмем любых двух детей – скажем Петю и Васю – и докажем, что у них поровну монет. Рассмотрим еще любых двух других детей – скажем Толю и Колю. По условию, у Пети с Толей и Колей вместе 10 монет, и у Васи с Толей и Колей вместе 10 монет. Значит, у Пети и Васи монет поровну.

Раз у любых двух ребят монет поровну, то монет поровну у всех. Но тогда ни у каких трех ребят не может быть вместе 10 монет – ведь 10 не делится на 3. Значит, утверждение барона Мюнхгаузена ложно.

4. Отметим середины дорожек  $AC$  и  $DF$  буквами  $X$  и  $Y$  (рис.2). Так как окружность симметрична, отрезок  $XY$  будет перпендикулярен параллельным дорожкам  $AC$  и  $DF$ . Значит,  $BE = XY$ , а также зеленый отрезок  $BX$  и красный отрезок  $EY$  равны по длине. Поэтому, если мы заменим маршрут первого на  $AXYF$ , длина пути первого не изменится. Аналогично, не изменится длина пути второго, если мы заменим его маршрут на  $CXYD$ . Но длины маршрутов  $AXYF$  и  $CXYD$ ,

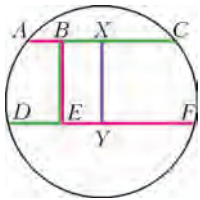


Рис. 2

очевидно, равны: оба маршрута состоят из половины  $DF$ , половины  $AC$  и еще расстояния  $XY$ .

5. Требуемые числа можно получить, например, так:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}; \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \quad 2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}; \quad 3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{6};$$

$$4 = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{2}; \quad 5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{6}; \quad 6 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4};$$

$$7 = \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{6}; \quad 8 = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{4}; \quad 9 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{3};$$

$$10 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{5}; \quad 11 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{6}; \quad 12 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{6};$$

$$13 = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{6}; \quad 14 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{6}; \quad 15 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{5};$$

$$16 = \left(\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4}; \quad 17 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{6};$$

$$18 = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{5} + \frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{4}; \quad 19 = \left(\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{6};$$

$$20 = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{5}.$$

#### ЗАДАЧИ

(см. с. 27)

1. Да, сможет.

Сначала Карлсон купит две лопасти и два винтика, потратив 258 эре. Потом купит еще лопасть со скидкой 20%, потратив еще 96 эре. Ему хватит денег:  $258 + 96 = 354 < 360$ .

2. Ответ приведен на рисунке 3.

3. 4 картины.

Посмотрим, сколько картин напишут художники с 22-го по 27-е сентября включительно. Каждый из шести художников, которые пишут по одной картине раз в два дня, напишет по 3 картины (по одной в каждую пару дней 22–23, 24–25 и 26–27), а каждый из восьми, которые пишут по одной картине раз в три дня, – по 2 картины (по одной в каждую тройку дней 22–23–24 и 25–26–27). Таким образом, суммарно художники напишут  $6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 34$  картины. Поскольку по условию с 22-го по 26-е они написали 30 картин, то 27-го они напишут  $34 - 30 = 4$  картины.

4. Струя состоит частично из воздуха из наших легких, это теплый воздух, а частично из окружающего (холодного) воздуха, который она увлекает с собой. Если медленно дышать через широко открытый рот, то в струе много воздуха из легких, она мало увлекает окружающий воздух и мало смешивается с ним. Получается теплая струя. Если же сжать губы плотно в трубочку и сильно дуть, то в струе мало воздуха из легких, зато она захватывает много холодного воздуха, «растворяясь» в нем. Струя получается едва теплее внешнего воздуха.

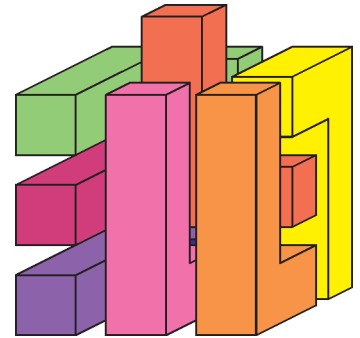


Рис. 3

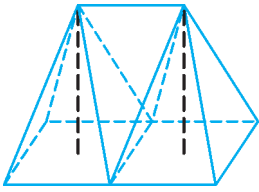


Рис. 4

5. 8. Проведем линии так, как показано на рисунке 4. Тогда боковая поверхность большой палатки состоит из восьми одинаковых треугольников (они равны по трем сторонам), что в два раза больше, чем у простой палатки. На дно большой палатки ушло ткани тоже в два раза больше, потому что оно состоит из двух квадратов, равных дну простой палатки.

**КУЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**

1. В восемь раз. Например, если в холодильнике борщ остается свежим в течение четырех суток, то летом на кухне он скиснет за двенадцать часов.
2. В организме обычно существуют очаги инфекции, которые защитные силы организма не могут уничтожить полностью, а могут лишь блокировать. При таком «мире» активность микроорганизмов сдерживается активностью защитных сил организма. При изменении температуры активность и микроорганизмов, и организма изменяются согласно указанному закону, но с разными значениями коэффициента  $k$  (у защитных сил организма его значение больше). Поэтому при повышении температуры сильнее становятся защитные механизмы нашего организма, и мы выздоравливаем. При переохлаждении, наоборот, инфекция берет реванш – мы простужаемся.
3. Вся вода выкипела, после чего температура начала быстро расти.
4. Чайник сгорит, если в нем выкипит вся вода. Время выкипания чайника равно  $t_2 = \frac{r}{c\Delta t}t_1$ , где  $t_1$  – время закипания,  $c$  – удельная теплоемкость воды,  $r$  – удельная теплота парообразования воды,  $\Delta t = 80^\circ\text{C}$ . Для наших данных  $t_2 = 100$  мин. Значит, у Матвея достаточно времени, чтобы сходить к Лизе и отдать учебник. Главное, чтобы он не любезничал с ней более 65 минут.
5. При солении кипящего борща жидкость вскипает. Причина та же, что и в рассказе о неопытном стажере. Брошенная соль – это не только кристаллики соли, но и большое количество воздушных пузырьков, которые, попав в кипящую воду, мгновенно вырастают.

**ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И ЕЩЕ ОДИН ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА**

3. *Указание.* Эти точки лежат на окружности с диаметром  $OP$ , где  $O$  – центр данной окружности.
4. *Указание.* Рассмотрите точку  $O$  (центр окружности) и примените утверждение задачи 1.

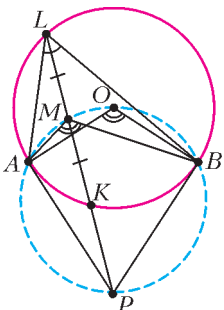


Рис. 5

5. а)  $\angle BMA = \angle BOA$  (см. задачу 2);  $\angle BLA$  и  $\angle BOA$  – соответственно вписанный и центральный углы одной окружности, значит,  $2\angle BLA = \angle BOA$  (рис. 5).

б) Углы  $\angle BEA$  и  $\angle BLA$  равны как вписанные. Значит, (по предыдущему пункту)  $2\angle BEA = \angle BMA$ . Угол  $\angle BMA$  опирается на дугу  $APB$ , причем  $P$  – середина дуги  $AB$ , следовательно, опирающийся на дугу  $BP$  вписанный угол  $\angle BMP$  в 2 раза меньше угла  $\angle BMA$ . Значит,  $\angle BEA = \angle BMP$ . Таким образом, прямые  $BM$  и  $BE$  имеют общую точку и пересекают пару параллельных прямых  $AE$  и  $PM$  под равными углами – а значит, эти прямые совпадают и прямая  $BE$  проходит через  $M$  – середину  $KL$  (рис. 6).

7. *Указание.* Рассмотрите проекции точки  $M$  на перпендикуляры, опущенные из  $O$  на стороны многоугольника.

8. *Указание.* Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд.

11. *Указание.* Примените утверждение предыдущей задачи для треугольника  $BHC$ , где  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ .

12. Это точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

14. Применим результат предыдущей задачи. Пусть длины высот треугольника равны  $h_a, h_b, h_c$ , радиус вписанной окружности равен  $r$ . Достаточно доказать, что

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} + \frac{h_b - 2r}{h_b} + \frac{h_c - 2r}{h_c} = 1.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Домножим обе части на площадь треугольника  $ABC$ , получим равенство  $a/2 + b/2 + c/2 = p$  (где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ ), справедливость которого очевидна.

15. *Указание.* Отрезки  $I_aA, I_bB, I_cC$  – высоты треугольника  $I_aI_bI_c$ , а  $I$  – его ортоцентр.

16. *Указание.* Точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  – проекции ортоцентра треугольника  $ABC$  на высоты треугольника  $A_1B_1C_1$ .

21. *Указание.* Применив утверждение об угле между хордой и касательной, можно получить, что  $\angle AA_0C = \angle AA_0B = 180^\circ - \angle BAC$ . Но это же условие выполняется и для точки  $P$  в предыдущей задаче. Осталось доказать, что точка с таким свойством единственна.

22. *Указание.* Из двух предыдущих задач ясно, что  $A_0, B_0, C_0$  – проекции центра описанной окружности  $O$  на симедианы  $AL, BL, CL$  соответственно. Значит, точки  $A_0, B_0, C_0$  лежат на окружности с диаметром  $OL$ .

25. *Указание.* Задача решается аналогично предыдущей. Центр  $A$  круга, полученного при сечении шара плоскостью  $\alpha$ , – проекция центра  $O$  шара на эту плоскость.

26. *Указание.* Эта пирамида вписана в сферу.

27. а) *Указание.* Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд. Эти три середины лежат в вершинах прямоугольного параллелепипеда, противоположные вершины которого – центр сферы и точка  $A$ .

б) *Указание.* Эти 15 прямых разбиваются на 5 групп, в каждой из которых 3 прямые попарно перпендикулярны.

**ВП ПО ИМЕНИ ЦЕНТР МАСС**

1.  $l_{\min} = 12\text{ м}$ . 2.  $v_3 = 16\text{ м/с}$ . 3.  $v_2 = \sqrt{\frac{2}{7}L\left(2g + \frac{qE}{m}\right)}$ .

4. И жук и центр обруча будут двигаться по окружностям, радиусы которых равны

$$R_1 = \frac{MR}{M+m} \text{ и } R_2 = \frac{mR}{M+m}$$

соответственно.

5.  $F = 9\text{ Н}$ .

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ХІ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

9 класс

1. Из условия следует, что трехчлены  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + bx + a$  имеют общий корень  $x_0$ , а также отличные от него корни  $x_1$  и  $x_2$  соответственно; в частности,  $a \neq b$ . Тогда



да  $0 = (x_0^2 + ax_0 + b) - (x_0^2 + bx_0 + a) = (a - b)(x_0 - 1)$ , т.е.  $x_0 = 1$ . Подставляя этот корень в любой трехчлен, получаем  $0 = 1 + a + b$ , т.е.  $b = -a - 1$ . Итак, наши трехчлены имеют вид  $x^2 + ax - (a + 1) = (x - 1)(x + a + 1)$  и  $x^2 - (a + 1)x + a = (x - 1)(x - a)$ . Их корнями являются числа 1,  $a$  и  $-(a + 1)$  (при  $a \neq 1, -2, -1/2$  они различны), сумма которых равна нулю.

2.  $60^\circ$ .

Пусть  $l$  – биссектриса угла  $EDF$ . Поскольку  $DE$  и  $DF$  – касательные к  $\omega$ , прямая  $l$  проходит через центр  $O$  окружности  $\omega$ .

Совершим симметрию относительно  $l$ . Так как  $\angle EDA = \angle FDC$ , луч  $DC$  перейдет в луч  $DA$ . Поскольку  $l$  проходит через  $O$ , окружность  $\omega$  перейдет в себя; значит, точка  $C$  переходит в точку  $C'$ , лежащую на  $DA$  и на  $\omega$ . При этом, так как  $AD \neq DC$ , точки  $C'$  и  $A$  различны (рис.7).

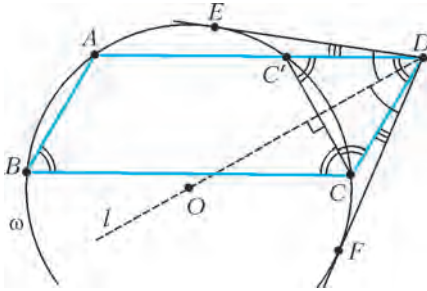


Рис. 7

Из той же симметрии имеем  $\angle DCC' = \angle DC'C$ . Так как точки  $A, B, C$  и  $C'$  лежат на  $\omega$ , имеем  $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$ . Итак, все три угла треугольника  $DCC'$  равны, откуда  $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$ .

3. 2.

Перепишем условие задачи в виде  $y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1$ . Заметим, что  $y < ax$ , поскольку правая часть равенства меньше  $(ax)^2$ . Но  $y$  и  $ax$  – целые числа, поэтому  $y \leq ax - 1$ . Следовательно,

$$a^2x^2 - a^2 + 1 = y^2 \leq (ax - 1)^2 = a^2x^2 - 2ax + 1.$$

Стало быть,  $2ax \leq a^2$ , т.е.  $a/x \geq 2$ . Оценка достигается при любом  $x > 100$ , если положить  $a = 2x$ ,  $y = ax - 1 = 2x^2 - 1$ .

4. **Лемма.** Пусть  $k \geq 55$ , и пусть среди любых  $k$  команд найдется одна, которая проиграла не более чем четырем из остальных  $k - 1$  команд. Тогда и среди любых  $k + 1$  команд найдется одна, которая проиграла не более чем четырем из остальных  $k$  команд.

**Доказательство.** Предположив противное, рассмотрим набор из  $k + 1$  команд  $M = \{C_1, C_2, \dots, C_{k+1}\}$ , для которых требуемой команды не найдется. Для каждого  $i = 1, 2, \dots, k + 1$ , если выкинуть из  $M$  команду  $C_i$ , то среди оставшихся найдется команда  $C_j$ , проигравшая не более чем четырем из остальных. Поскольку  $C_j$  не является требуемой для всего набора  $M$ , она проиграла также команде  $C_i$  и, более того, проиграла ровно пяти командам из  $M$ . Назовем такую команду  $C_j$  подходящей для команды  $C_i$ .

Рассмотрим все команды из  $M$ , являющиеся подходящими хотя бы для одной другой команды. Каждая из них является подходящей максимум для пяти из  $k + 1 \geq 56$  команд; значит, по принципу Дирихле, число  $s$  подходящих команд не менее 12.

Рассмотрим все игры между подходящими командами. Этих игр всего  $s(s - 1)/2$ , и в каждой из них одна из  $s$  подходящих команд проиграла. Опять же по принципу Дирихле, одна из подходящих команд проиграла не менее чем  $\frac{s(s - 1)}{2} : s = \frac{s - 1}{2} \geq \frac{11}{2}$  другим подходящим командам. Значит, одна из

подходящих команд проиграла хотя бы шести командам, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Для решения задачи покажем индукцией по  $k = 55, 56, \dots, 110$ , что среди любых  $k$  команд найдется одна, которая проиграла не более чем четырем из остальных  $k - 1$  команд. База при  $k = 55$  верна по условию, а переход доказан в лемме. Значит, это утверждение верно при  $k = 110$ , что и требовалось.

5. 49.

Предположим, что два неотрицательных числа стоят рядом. Тогда число, стоящее перед ними, больше их суммы, т.е. оно положительно. Аналогично, число перед ним также положительно, и т.д. В итоге получаем, что все числа неотрицательны; но тогда наименьшее из них не может быть больше суммы двух следующих – противоречие.

Итак, среди любых двух чисел подряд есть хотя бы одно отрицательное. Значит, положительных чисел не более 50. Пусть их ровно 50, тогда они чередуются с отрицательными. Рассмотрим теперь три числа  $-a, b, -c$ , стоящие подряд (здесь  $a, b, c > 0$ ). Тогда  $-a > b - c > -c$ , т.е. любое отрицательное число строго больше следующего за ним отрицательного числа. Поскольку числа стоят по кругу, это невозможно. Стало быть, положительных чисел не более 49.

Осталось привести пример, в котором ровно 49 положительных чисел. Годится, например, такая расстановка:

$$-200, 1, -202, 1, -204, 1, -206, 1, \dots, -296, 1, -298, -99.$$

7. Выберем на  $\Omega$  точку

$D$  так, что  $AD \parallel BC$

(рис. 8); тогда точки  $A$  и

$D$  симметричны относи-

тельно серединного пер-

пендикуляра к  $BC$ . Пусть

$H'$  – проекция точки  $D$

на  $BC$ , а  $K$  – середина

$BC$ . Из симметрии,  $K$

также является серединой

отрезка  $HH'$ ; кроме того,

$HH' = AD$ .

Пусть  $X$  – точка пересе-

чения отрезков  $AK$  и  $DH$ .

Тогда треугольники  $ADX$

и  $KHX$  подобны, откуда

$$\frac{AX}{KX} = \frac{AD}{KH} = \frac{2KH}{KH} = 2.$$

Значит,  $X$  –

точка пересечения медиан

треугольника  $ABC$ , т.е.  $X = M$ .

Итак, точки  $A', H, M$  и  $D$

лежат на одной прямой.

Из симметрии имеем  $\angle ABC = \angle BCD$ .

Кроме того,

$\angle BCD = \angle BA'D$  как опирающиеся на одну дугу.

Значит,

$\angle ABH = \angle ABC = \angle BA'D = \angle BA'H$ .

Это и означает, что  $AB$  –

касательная к окружности,

описанной около треугольника

$BA'H$ .

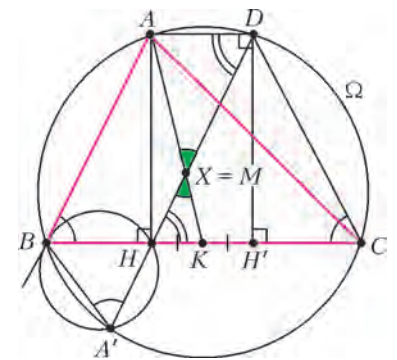


Рис. 8

10 класс

2. Так как  $BC > AC$ ,

точки  $A$  и  $C$  лежат в

одной полуплоскости

относительно сере-

динного перпендику-

ляра к  $AB$ . Посколь-

ку  $\overline{BA} = \overline{CD}$ , точка

$D$  лежит в той же

полуплоскости. Тем

самым,  $A'$  лежит на

продолжении отрезка

$DC$  за точку  $C$

(рис.9).

Пусть  $l$  – биссектри-

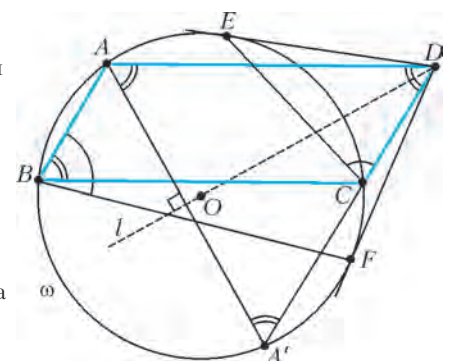


Рис. 9

са угла  $EDF$ . Поскольку  $DE$  и  $DF$  – касательные к  $\omega$ , прямая  $l$  проходит через центр  $O$  окружности  $\omega$ . Совершим симметрию относительно  $l$ ; при этом  $\omega$  перейдет в себя. Так как  $\overset{\frown}{ECA'} = \overset{\frown}{ACF}$ , точки  $A$  и  $A'$  при этой симметрии переходят друг в друга. Значит,  $\angle DAA' = \angle DA'A$ . С другой стороны, поскольку точка  $A'$  лежит на  $\omega$ , имеем  $\angle AA'C = \angle ABC = \angle ADA'$ . Итак, все три угла треугольника  $DAA'$  равны, откуда  $\angle ABC = \angle ADA' = 60^\circ$ .

**3.** Построим граф, вершинами которого будут участники, и от  $A$  будет идти ориентированное ребро к  $B$ , если  $A$  лучше  $B$  по мнению хотя бы 51 судьи (в этом случае мы будем писать  $A \rightarrow B$ ). Таким образом,  $A$  и  $B$  не будут соединены ребром ровно тогда, когда каждый лучше другого по мнению ровно 50 судей.

**Лемма.** Если  $A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow C$ , то  $A \rightarrow C$ .

**Доказательство.** Предположим противное:  $C$  лучше  $A$  по мнению хотя бы 50 судей. Мы знаем, что  $B$  лучше  $A$  по мнению не более 49 судей; значит, найдется судья, который считает, что  $C$  лучше  $A$ , а  $A$  лучше  $B$ . Аналогично, найдется судья, считающий, что  $B$  лучше  $C$ , а тот лучше  $A$ , а также судья, считающий, что  $A$  лучше  $B$ , а тот лучше  $C$ . Существование этих трех судей противоречит условию.

Перейдем к решению. Докажем индукцией по  $n$ , что в ориентированном графе на  $n$  вершинах, для которого выполнено утверждение леммы, можно пронумеровать вершины так, чтобы каждая стрелка шла от меньшего числа к большему. Из этого следует утверждение задачи.

Индукция по  $n$ . При  $n = 2$  утверждение очевидно. Для перехода докажем, что найдется вершина  $A$ , из которой не идет ни одной стрелки. Тогда можно этой вершине присвоить номер  $n$ , выбросить ее и перенумеровать остальные вершины по предположению индукции.

Предположим, что такой вершины  $A$  нет. Тогда в каждую вершину ведет по стрелке. Выйдем из любой вершины и будем двигаться против направления стрелок. Рано или поздно мы попадем в вершину, в которой уже были; таким образом, в графе найдем ориентированный цикл. Выберем из всех таких циклов цикл  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$  наименьшей длины  $k$ .

Ясно, что  $k \geq 3$ . Если  $k = 3$ , то тройка вершин  $A_1, A_2, A_3$  противоречит утверждению леммы. Если же  $k > 3$ , то из  $A_{k-1} \rightarrow A_k \rightarrow A_1$  по лемме имеем  $A_{k-1} \rightarrow A_1$ , и мы нашли более короткий цикл  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_1$ . В любом случае мы пришли к противоречию, что и доказывает требуемое.  
*Замечание.* Можно облегчить решение, применив следующий трюк. Введем 101-го судью, мнение которого будет совпадать с мнением 100-го. Достаточно доказать, что в новой ситуации можно составить общий рейтинг так, чтобы любые два участника были упорядочены так, как считает большинство судей (тогда в исходной ситуации так будет считать не менее половины). Дальнейшее решение несколько облегчается, поскольку в этом случае любые две вершины соответствующего графа будут соединены ребром.

**4.** Да.

Для натуральных  $n$  и  $k$  введем обозначения  $f(n) = n - S(n)$  и  $f^k(n) = \underbrace{f(f(\dots(n)\dots))}_k$ . При увеличении числа  $n$  на 1 число

$S(n)$  либо увеличивается на 1 (если  $n$  не заканчивается на 9), либо уменьшается. Это значит, что функция  $f$  нестрого возрастает, причём  $f(n+10) > f(n)$  при всех  $n$ .

Выберем натуральное  $d$  такое, что  $10^d > 20d(n+1)$ , и обозначим  $k = 10^d$ . Пусть  $b_0 = 10^k - 1$  и  $c_0 = 10^k - k$ . Положим  $b_i = f^i(b_0)$  и  $c_i = f^i(c_0)$ . Мы докажем, что

$$b_n > c_n > b_{n+1}. \quad (*)$$

Для этого мы оценим числа  $b_i$  и  $c_i$  при всех  $i \leq n+1$ .

Так как  $S(c_i) \leq 9k$ , по индукции получаем  $c_i \geq 10^k - k - 9ki$ .

При  $i \leq n+1$  имеем  $(9i+1)k \leq 10ki \leq 10^{d+1}(n+1) < 10^{2d}$ , а значит, в числе  $c_i$  хотя бы  $k - 2d$  первых цифр – девятки.

Поэтому  $S(c_i) \geq 9(k-2d)$ , откуда (опять же по индукции) имеем  $c_i \leq 10^k - k - 9(k-2d)i$ . Итак,

$$10^k - (9i+1)k \leq c_i \leq 10^k - k - 9(k-2d)i.$$

Аналогично, для  $b_i$  получаются оценки

$$10^k - 9ki - 1 \leq b_i \leq 10^k - 1 - 9(k-2d)i.$$

Таким образом, для доказательства неравенства  $c_n < b_n$  достаточно проверить, что

$$10^k - k - 9(k-2d)n < 10^k - 9kn - 1,$$

т.е.  $k > 18dn + 1$ ; это верно в силу выбора  $d$ . Чтобы доказать неравенство  $b_{n+1} < c_n$ , достаточно проверить, что

$$10^k - 1 - 9(k-2d)(n+1) < 10^k - (9n+1)k,$$

т.е.  $8k+1 > 18d(n+1)$ , что опять же верно. Итак,  $(*)$  доказано.

Из  $(*)$  нетрудно вывести, что число  $c_n$  является  $n$ -хорошим, но не является  $(n+1)$ -хорошим. Первое верно, поскольку  $c_n = f^n(c_0)$ . Осталось показать, что  $c_n \neq f^{n+1}(x)$  при всех натуральных  $x$ . Если  $x \leq 10^k - 1 = b_0$ , то  $f^{n+1}(x) \leq f^{n+1}(b_0) = b_{n+1} < c_n$ . Если же  $x \geq 10^k$ , то  $f(x) \geq f(10^k) = b_0$ , и поэтому  $f^{n+1}(x) \geq f^n(b_0) = b_n > c_n$ .

**5.** Пусть сторона квадрата равна  $m$ . По условию,  $m \cdot m = n \cdot k$ . Пусть  $d = \text{НОД}(m, n)$ ; тогда  $m = m_1d$ ,  $n = n_1d$ , где  $\text{НОД}(m_1, n_1) = 1$ ; при этом  $m_1m = n_1k$ . Первые сомножители в обеих частях последнего равенства взаимно просты, следовательно,  $m$  делится на  $n_1$ .

Это значит, что квадрат можно разделить на горизонтальные полосы шириной  $n_1$  и на вертикальные полосы шириной  $d$ . При этом он разобьется на равные прямоугольники из  $n_1d = n$  клеток, что и требовалось.

**7.** Пусть  $T$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $QM$ , а  $S$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $PM$  (рис.10). Так как  $\angle PSQ = \angle PTQ = 90^\circ$ , то точки  $S, T, P, Q$  лежат на одной окружности  $\Omega$  с диаметром  $PQ$ , центр этой окружности – середина  $O$  отрезка  $PQ$ . Проведем через точку  $M$  хорду  $KL$  окружности  $\Omega$ , перпендикулярную  $OM$ . Тогда  $K$  и  $L$  симметричны относительно точки  $M$ . Пусть прямая  $KL$  пересекает прямые  $QS$  и  $PT$  в точках  $B'$  и  $C'$  соответственно. Из теоремы о бабочке следует, что точки  $B'$  и  $C'$  симметричны относительно  $M$ , но тогда  $B = B'$  и  $C = C'$  (иначе  $BB'CC'$  – параллелограмм, что невозможно, так как прямые  $BB'$  и  $CC'$  не параллельны).

Точки  $S, T, M, H$  лежат на одной окружности (с диаметром  $AM$ ), значит,  $H$  и  $X$  – точки пересечения описанных окружностей треугольников  $STM$  и  $PQM$  с прямой  $BC$ . Теперь можно заметить, что задача вытекает из следующего общего факта (см. например, статью В.Протасова «О двух велосипедистах и вишневой косточке» в «Кванте» №3 за 2008 год):

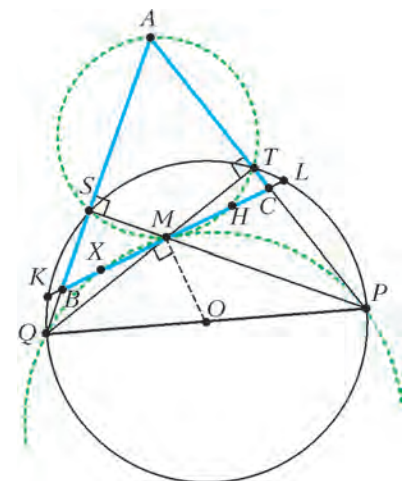


Рис. 10

В окружности проведены хорды  $QT$ ,  $PS$  и  $KL$ , пересекающиеся в одной точке  $M$ . Описанные окружности треугольников  $STM$  и  $PQM$  пересекаются вторично с прямой  $KL$  в точках  $H$  и  $X$ . Тогда  $KH = LX$ .

Другое решение этой задачи можно найти в статье Е.Бакаева, П.Кожевникова и И.Яковлева «Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника» в этом номере журнала.

11 класс

2. При всех натуральных  $n > 1$ .

Пусть  $n = 2^t \cdot m$ , где  $t \geq 0$ , а число  $m$  нечетно.

Рассмотрим произвольную дробь  $\frac{k}{n}$ . Если  $k$  делится на  $2^{t+1}$ , то числитель этой дроби после сокращения будет четен, в противном случае он будет нечетен. Среди чисел  $1, 2, \dots$

$\dots, n-1$  есть ровно  $\frac{m-1}{2}$  чисел, делящихся на  $2^{t+1}$ . Значит,

в сумме  $f(n)$  имеется ровно  $n-1-\frac{m-1}{2}$  нечетных слагаемых. Поэтому  $f(n)$  четно тогда и только тогда, когда числа  $n-1$  и  $\frac{m-1}{2}$  имеют одинаковую четность, т.е. в следующих двух случаях: либо  $n$  нечетно и  $m \equiv 1 \pmod{4}$ , либо же  $n$  четно и  $m \equiv 3 \pmod{4}$ .

Осталось заметить, что числа  $n$  и  $2015n$  имеют одну четность; кроме того, при нечетном  $m$  числа  $m$  и  $2015m$  дают разные остатки при делении на 4. Значит, числа  $f(n)$  и  $f(2015n)$  всегда имеют разную четность.

5. Да.

Покажем, как блоха может прыгать, попадая последовательно в точки  $0, 1, 2, 3, \dots$  (каждый раз – за несколько прыжков). Для этого достаточно показать, как, попав в точку  $n$ , за несколько прыжков попасть в точку  $n+1$ .

Пусть до попадания в точку  $n$  блоха совершила  $k-1$  прыжков (т.е. длина следующего прыжка будет равна  $2^k+1$ ). Тогда она может сделать  $l=2^k$  прыжков влево, а затем один прыжок вправо. В результате она сместится вправо на

$$\begin{aligned} (2^{k+l}+1) - (2^k+1) - (2^{k+1}+1) - \dots - (2^{k+l-1}+1) &= \\ = (2^{k+l} - 2^k - 2^{k+1} - \dots - 2^{k+l-1}) + 1 - 2^k &= 2^k + 1 - 2^k = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

7. Пусть, без ограничения общности, точка  $D$  лежит на луче  $BA$ . Пусть биссектрисы  $AI$  и  $BI$  углов треугольника пересекаются вторично в точках  $A'$  и  $B'$  соответственно. Пусть, наконец,  $L$  – середина дуги  $ACB$  (рис.11).

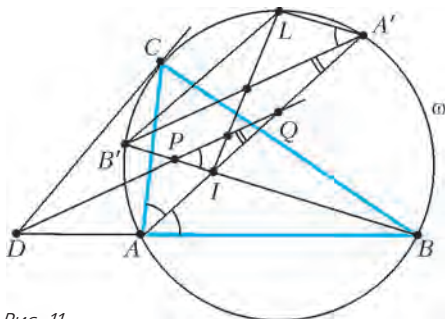


Рис. 11

Заметим, что  $\angle LA'A = \angle LBA = (\angle A + \angle B)/2 = \angle B'IA$ . Значит,  $LA' \parallel IB'$  и, аналогично,  $LB' \parallel IA'$ . Поэтому  $IA'LB'$  – параллелограмм, и прямая  $LI$  делит  $A'B'$  пополам.

Далее,  $\angle CDB = \angle CAB - \angle ACD = \angle A - \angle B$ . Значит,

$$\begin{aligned} \angle PQA = \angle QAB - \angle QDB = \angle A/2 - (\angle A - \angle B)/2 &= \\ = \angle B/2 = \angle B'A'A, \end{aligned}$$

так что  $PQ \parallel A'B'$ . Но тогда прямая  $LI$ , делящая отрезок  $A'B'$  пополам, делит пополам и отрезок  $PQ$ , что и требовалось доказать.

8.  $\alpha = 1/\sqrt{2a^2 - 2ab + b^2}$ .

Введем на плоскости систему координат так, чтобы центры клеток, и только они, имели целые координаты. Будем говорить, что клетка имеет те же координаты, что и ее центр. Назовем прямоугольник  $a \times b$  вертикальным или горизонтальным, если его сторона длины  $b$  вертикальна или горизонтальна соответственно.

Положим  $D = a^2 + (b-a)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$ . Отметим на плоскости клетку  $(0, 0)$  и все клетки, полученные из нее сдвигами на целые кратные векторов  $(a, b-a)$  и  $(b-a, -a)$ ; на рисунке 12 приведен пример такой разметки при  $a = 3, b = 5$ .

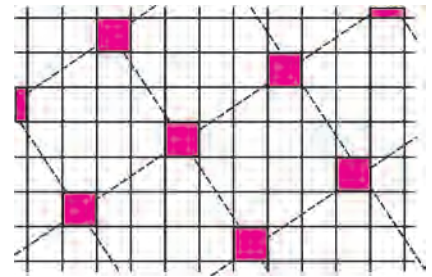


Рис. 12

Центры этих клеток находятся в вершинах квадратной сетки

со стороной  $\sqrt{D}$ ; при этом клетки  $(D, 0) = (a^2 + (b-a)^2, (b-a)a - a(b-a))$  и  $(0, D)$  отмечены. Значит, при горизонтальном или вертикальном сдвиге на  $D$  отмеченная клетка переходит в отмеченную. Отсюда нетрудно получить, что в любом квадрате  $D \times D$  ровно  $D$  отмеченных клеток.

Покажем, что такая разметка удовлетворяет условию; отсюда будет следовать, что  $\alpha \leq D/D^2 = 1/D$ . Действительно, рассмотрим любую полосу из  $b$  последовательных горизонталей. Ясно, что в ней есть хотя бы одна отмеченная клетка. Далее, если  $(x, y)$  – координаты любой отмеченной клетки в ней, то одна из двух клеток  $(x+a, y+(b-a))$  или  $(x+(b-a), y-a)$  также находится в этой полосе и смещена относительно предыдущей не более чем на  $a$  вправо. Значит, в любых  $a$  вертикалях нашей полосы найдется отмеченная клетка. Доказательство для горизонтальных прямоугольников аналогично.

Осталось показать, что  $\alpha = 1/D$  подходит. Рассмотрим произвольную разметку, удовлетворяющую условию. Каждому вертикальному прямоугольнику сопоставим любую из самых верхних отмеченных в нем клеток. Оценим, какому количеству прямоугольников может быть сопоставлена одна отмеченная клетка  $A$ ; пусть ее координаты  $(0, 0)$ . Ее содержат  $ab$  вертикальных прямоугольников.

Рассмотрим горизонтальную полосу из клеток, ординаты которых не меньше 1 и не больше  $a$  (рис.13). Пусть  $B$  – отмеченная клетка в этой полосе с наименьшей неотрицательной абсциссой, а  $C$  – отмеченная клетка в этой полосе с наибольшей отрицательной абсциссой. Тогда между  $B$  и  $C$  расположено не более  $b-1$  вертикалей, в противном случае в нашей полосе между этими клетками нашелся бы горизонтальный прямоугольник без отмеченных клеток.

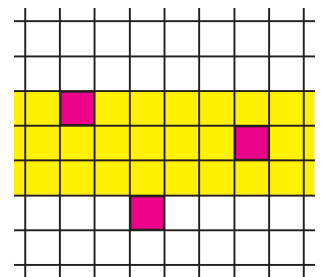


Рис. 13

Рассмотрим теперь все  $a(b-a)$  вертикальных прямоугольников, содержащих  $A$  и пересекающих хотя бы  $a$  горизонталей сверху от  $A$ . Каждый из них содержит  $B$  или  $C$ , за исключением тех, которые расположены строго между  $B$  и  $C$ ; таковых по доказанному выше не более  $(b-a)(b-a)$ . Значит, хотя бы  $a(b-a) - (b-a)^2 = (2a-b)(b-a)$  прямоугольников,



содержащих  $A$ , содержат также  $B$  или  $C$ , и  $A$  им не сопоставлена. Итого, клетка  $A$  сопоставлена не более чем  $ab - (2a - b)(b - a) = D$  вертикальным прямоугольникам. Пусть теперь  $N$  – произвольное число. Положим  $K = (a + b)N^2$  и рассмотрим произвольный квадрат  $K \times K$ ; пусть в нем  $s$  отмеченных клеток. В этом квадрате расположено не меньше  $(K - a)(K - b)$  вертикальных прямоугольников; каждому из них сопоставлена одна из  $s$  отмеченных клеток. По доказанному получаем

$$s \geq \frac{(K - a)(K - b)}{D} > \frac{K(K - a - b)}{D} = \frac{(a + b)^2 N^2 (N^2 - 1)}{D}.$$

Разделив наш квадрат  $K \times K$  на  $(a + b)^2 N^2$  квадратов размера  $N \times N$ , получаем, что в одном из них больше чем  $\frac{N^2 - 1}{D}$  отмеченных клеток; значит, их не меньше чем  $\frac{N^2 - 1}{D} + \frac{1}{D} = \frac{N^2}{D}$ , что и требовалось доказать.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

#### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

- $u = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 + v_2} = 26$  км/ч.    2. 1)  $N = \frac{4f^2}{F} + f$ ; 2)  $N_{\max} = 3f$ .
- 1)  $t_1 = t_0 - 2\theta = 12^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = t_0 - \theta = 21^\circ\text{C}$ ;  
2)  $t_{\text{вн}} = t_0 - 3\theta = 3^\circ\text{C}$ ; 3)  $t_3 = t_0 - \frac{3}{2}\theta = 16,5^\circ\text{C}$ .
- $I_A = \frac{U_{AB}}{3R}$  при  $U_{AB} < \frac{3}{2}U_0$ ,  $I_A = \frac{U_0}{2R}$  при  $\frac{3}{2}U_0 < U_{AB} < \frac{5}{2}U_0$ ,  $I_A = \frac{3U_0 - U_{AB}}{R}$  при  $U_{AB} > \frac{5}{2}U_0$ ; график зависимости  $I_A$  от  $U_{AB}$  приведен на рисунке 14.

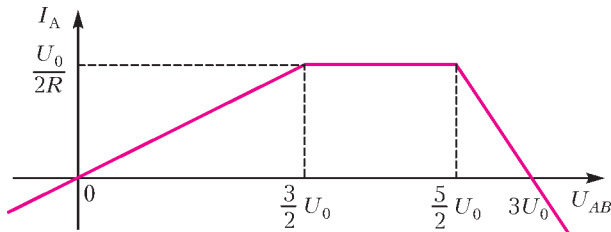


Рис. 14

- 1) Чебурашка живет на 70-м этаже;  
2) часы Чебурашки показывали 16:00; 3) окна в корпусе Гены казались Чебурашке золотыми в течение 56 мин.

10 класс

- 1)  $v_{\max} = F \sqrt{\frac{k_1}{mk_2(k_1 + k_2)}}$ ; 2)  $x_1 = -\frac{F}{k_1 + k_2}$  (отрицательный знак означает, что пружина сжата).
- Нетрудно показать, что  $T \sim \frac{P}{\Delta p / \Delta z}$ . Выражение в знаменателе при  $z = 0$  и  $z = 5$  км можно найти графически (рис.15): провести касательные к данному графику и отметить точки пересечения с горизонтальной осью. Учитывая, что  $l_0 = 2,5$  км и  $l_1 = 1,25$  км, для температуры  $T_0$  у поверхности планеты получим  $T_0 = T_1 \frac{l_0}{l_1} = (680 \pm 40)\text{K}$  (погрешность связана с неточностью проведения касательных).
- $\frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{10}$ ,  $\frac{d_2}{d_1} = \frac{14}{5}$  (см. решение задачи Ф2391 в этом номере журнала).

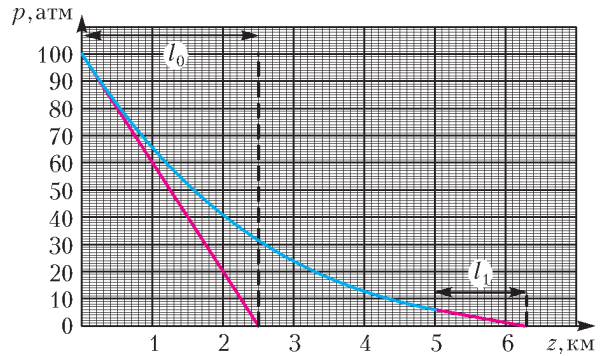


Рис. 15

- 1)  $v_1 = -\frac{2}{3}v$ ,  $v_2 = \frac{4}{3}v$ ,  $v_3 = \frac{1}{3}v$ ;  
2)  $v_1 = -\frac{1}{3}v$ ,  $v_2 = \frac{5}{3}v$ ,  $v_3 = -\frac{1}{3}v$ .  
5.  $P_2 = P_1 = 7,2$  Вт.

11 класс

- Если  $q_1 > 0$ , то  $T = T_0 \sqrt{3} = 1,73$  с; если  $q_1 < 0$ , то  $T = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = 0,58$  с.
- $R_{AC} = \frac{2U}{I} + r = 36$  кОм; сопротивления не изменятся.
- $v = v_0 + \frac{Mqs}{C_p T m} = 9$  см/с, где  $C_p = \frac{7}{2}R$  – молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении (в результате нагрева скорость горячего воздуха на выходе из трубки больше скорости холодного воздуха на входе, поэтому такая трубка с нагревателем представляет собой реактивный двигатель).
- $L = \frac{c \Delta T \Delta t}{T (\Delta \phi)^2}$  (заметим, что результат не зависит от того, с какой скоростью движется объект, т.е. он справедлив не только при скоростях объекта  $v \ll c$ ).
- Расстояние  $l$  от «миллиавтомобиля» до линзы может изменяться в пределах  $F \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\mu g F}{2v_0^2}}\right) \leq l < F$  или  $F < l \leq F \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g F}{2v_0^2}}\right)$ , при этом изображение может быть как мнимым (при  $l < F$ ), так и действительным (при  $l > F$ ).

### LVI МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

- а) Пусть  $n$  нечетно. Нужным примером сбалансированного множества является множество вершин правильного  $n$ -угольника. Действительно, любые две вершины  $A, B$  симметричны относительно оси симметрии  $n$ -угольника, которая содержит еще одну вершину  $C$ , так что  $CA = CB$ .  
б) Все нечетные  $n \geq 3$ .  
Если  $n$  нечетно, пусть  $\mathcal{V}$  – множество вершин правильно  $n$ -угольника. Из пункта а) нам известно, что  $\mathcal{V}$  сбалансированное. Мы утверждаем, что множество  $\mathcal{V}$  также эксцентричное. В самом деле, если точка  $P$  такова, что  $PA = PB = PC$  для некоторых трех вершин  $A, B$  и  $C$ , то  $P$  – центр описанной окружности  $n$ -угольника, но он не содержится в множестве  $\mathcal{V}$ . Пусть теперь  $n = 2k$  четно,  $k \geq 2$ . Рассмотрим ромб  $OXYZ$ , состоящий из двух правильных треугольников  $OXY$  и  $OYZ$ . Будем поворачивать треугольник  $OXY$  на небольшие углы вокруг точки  $O$  (сделаем так  $k - 2$  раза), получим правильные треугольники  $OX_1Y_1, \dots, OX_{k-2}Y_{k-2}$ . Положим  $\mathcal{V} = \{O, X, Y, Z, X_1, Y_1, \dots, X_{k-2}, Y_{k-2}\}$  и покажем, что множество  $\mathcal{V}$  сбалансированное (на рисунке 16 показан пример множества для  $n = 10$ ). Для любых двух вершин  $A, B \in \mathcal{V}$ ,

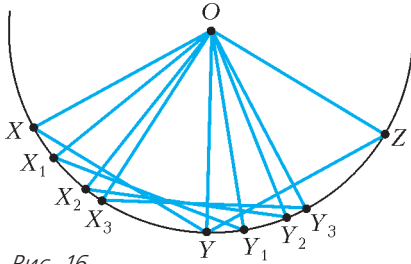


Рис. 16

$\mathcal{V}$ , состоящее из четного количества  $n = 2k$  точек, одновременно является сбалансированным и эксцентричным. Скажем, что паре различных точек  $A, B \in \mathcal{V}$  соответствует точка  $C \in \mathcal{V}$ , если  $AC = BC$ . Так как всего есть  $\frac{n(n-1)}{2}$  пар точек, найдется точка  $P \in \mathcal{V}$ , которая соответствует не менее чем  $\frac{n(n-1)}{2n} = k - \frac{1}{2}$  парам, и, следовательно, не менее чем  $k$  парам. Заметим, что ни одна из этих пар не может содержать точку  $P$ , так что в объединении эти пары дают не более  $2k - 1$  точек. Значит, среди этих пар найдутся две пары, имеющие общую точку, пусть это пары  $\{A, B\}$  и  $\{A, C\}$ . Но тогда получаем  $PA = PB = PC$  – противоречие с эксцентричностью множества.

2. (2, 2, 2), (2, 2, 3), (3, 5, 7), (2, 6, 11) с точностью до перестановки чисел. (Решение А.Зимины) Нетрудно проверить, что все указанные тройки удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других таких троек нет.

0) Если одно из чисел равно 1 (скажем,  $c = 1$ ), то  $a - b$  и  $b - a$  – степени двойки. Противоречие.  
 1) Пусть далее  $a, b, c$  не меньше 2. Пусть какие-то два числа, например  $a$  и  $b$ , равны. Тогда  $bc - a = a(c - 1) = 2^n$ , откуда  $a = 2^{k_1}$ , где  $k_1 \geq 1$ ,  $c = 2^{k_2} + 1$ . Отсюда  $2^m = ab - c = a^2 - c = 2^{2k_1} - 2^{k_2} - 1$ .  
 Если  $m = 0$ , то  $2^{2k_1} - 2^{k_2} = 2$ . Разность двух степеней двойки равна 2 только в случае, когда эти степени 4 и 2. Таким образом,  $2k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ , откуда  $a = b = 2$ ,  $c = 3$ . Если же  $m \geq 1$ , то  $2^{2k_1} - 2^{k_2} - 1$  четно, значит,  $k_2 = 0$ , тогда  $2^{2k_1} - 2^m = 2$ , откуда  $2k_1 = 2$ ,  $m = 1$ , значит,  $a = b = c = 2$ .

2) Далее, пусть, не умаляя общности,  $a > b > c$ ,  $bc - a = 2^\alpha$ ,  $ca - b = 2^\beta$ ,  $ab - c = 2^\gamma$ . Имеем  $2^\beta - 2^\alpha = (a - b)(c + 1) > 0$ , значит,  $\beta > \alpha$ . Аналогично,  $\gamma > \beta$ . Итак,  $\gamma > \beta > \alpha$ .  
 2.1) Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда  $bc - a = 1$ ,  $ac - b = 2^\beta$ ,  $ab - c = 2^\gamma$ ;

$$2^\gamma - 2^\beta = ab - c - ac + b = (b - c)(a + 1) = (b - c)bc : 2^\beta$$

и, аналогично,

$$2^\gamma + 2^\beta = ab - c + ac - b = (b + c)(bc - 2) : 2^\beta$$

Одно из чисел  $bc$  и  $bc - 2$  не делится на 4. Рассмотрим подслучаи.

2.1a) Если  $bc$  не делится на 4, то  $b - c : 2^{\beta-1}$ . Если  $b - c \neq 2^{\beta-1}$ , то  $b - c \geq 2 \cdot 2^{\beta-1} = 2^\beta = ac - b$ . Отсюда  $2b \geq (a + 1)c$ , но  $a + 1 > b, c \geq 2$  – противоречие. Значит,  $b - c = 2^{\beta-1} = \frac{ac - b}{2}$ ,  $3b = (a + 2)c$ . Если  $c \geq 3$ , тоже получаем противоречие. При  $c = 2$  имеем  $3b = 2a + 4$ ,  $bc - a = 2b - a = 1$ , откуда  $4b = 2a + 2 < 3b$  – противоречие.

2.16) Если же  $bc - 2$  не делится на 4, то  $b + c : 2^{\beta-1}$ . Если  $b + c \neq 2^{\beta-1}$ , то  $b + c \geq 2 \cdot 2^{\beta-1} = 2^\beta = ac - b$ . Отсюда  $2b + c \geq ac$ , поэтому  $3b \geq ac$ . При  $c > 2$  имеем  $3b > 3a$  – противоречие. При  $c = 2$  имеем  $bc - a = 2b - a = 1$ , откуда  $a = 2b - 1$ . Далее,  $2b + c = 2b + 2 \geq ac = 4b - 2$ , откуда  $b \leq 2$  – противоречие.

отличных от  $O$ , имеем  $OA = OB$ . Для пары вида  $O, A$ , где  $A \in \mathcal{V}$ , в множестве  $\mathcal{V}$  найдется точка  $C$  такая, что треугольник  $OAC$  – правильный, так что  $CO = CA$ .

Теперь предположим, что множество

Значит,  $b + c = 2^{\beta-1} = \frac{ac - b}{2}$ ,  $3b + 2c = ac$ . Если  $c \geq 5$ , то  $3b + 2c \geq 5a$  – противоречие. Рассмотрим равенства  $3b + 2c = ac$ ,  $bc - a = 1$  для оставшихся возможных значений  $c$ .

При  $c = 2$  имеем  $3b + 4 = 2a$ ,  $2b - a = 1$ , откуда  $b = 6$ ,  $a = 11$ . При  $c = 3$  имеем  $3b + 6 = 3a$ ,  $3b - a = 1$ , откуда  $2a = 7$  – противоречие.

При  $c = 4$  имеем  $3b + 8 = 4a$ ,  $4b - a = 1$ , откуда  $13b = 12$  – противоречие.

2.2) Пусть теперь  $\gamma > \beta > \alpha \geq 1$ .  
 2.2.1) Пусть все три числа  $a, b, c$  нечетны. Имеем  $2^\gamma - 2^\beta = (a + 1)(b - c) : 2^\beta$ ,  $2^\gamma + 2^\beta = (a - 1)(b + c) : 2^\beta$ . Оба числа  $b - c$  и  $b + c$  не могут делиться на 4, иначе  $2c : 4$  и  $c : 2$  – противоречие.

2.2.1a) Пусть  $b - c$  не делится на 4. Тогда  $a + 1 : 2^{\beta-1} = \frac{ac - b}{2}$ . Отсюда  $2(a + 1) \geq ac - b > ac - a = a(c - 1)$ . При  $c > 4$  отсюда  $2a + 2 > 3a$ ,  $a < 2$  – противоречие. Значит,  $c = 3$ .

Если  $a + 1 \neq 2^{\beta-1}$ , то  $a + 1 \geq 2 \cdot 2^{\beta-1} = 2^\beta = ac - b > a(c - 1) = 2a$ ,  $a < 1$  – противоречие. Значит,  $a + 1 = \frac{ac - b}{2} = \frac{3a - b}{2}$ , откуда  $a = b + 2$ . Тогда  $ab - c = (b + 2)b - 3 = (b - 1)(b + 3)$ .

Оба числа  $b - 1, b + 3$ , разность между которыми равна 4, должны являться степенями двойки. Единственная возможность:  $b - 1 = 4$ ,  $b + 3 = 8$ , т.е.  $b = 5$ . Приходим к тройке  $c = 3, b = 5, a = 7$ .

2.2.16) Пусть  $b + c$  не делится на 4. Тогда  $a - 1 : 2^{\beta-1} = \frac{ac - b}{2}$ . Отсюда  $2(a - 1) \geq ac - b > ac - a = a(c - 1)$ , значит,  $c - 1 \leq 1$  (иначе  $2a - 2 > 2a$ , что неверно) – противоречие.

2.2.2) Пусть среди чисел  $a, b, c$  есть хотя бы одно четное. Если это  $a$ , то поскольку  $ab - c$  и  $ca - b$  четны, получаем, что  $c$  и  $b$  четны. Аналогично, если любое из чисел  $a, b, c$  четно, то и все три числа четны. Положим  $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$ . Тогда  $2a_1b_1 - c_1 = 2^{\gamma-1}$ ,  $2b_1c_1 - a_1 = 2^{\alpha-1}$ ,  $2c_1a_1 - b_1 = 2^{\beta-1}$ . Пусть для некоторого  $i$  мы уже получили равенства (для натуральных  $a_i, b_i, c_i$ )  $2^i a_i b_i - c_i = 2^{\gamma-i}$ ,  $2^i b_i c_i - a_i = 2^{\alpha-i}$ ,  $2^i c_i a_i - b_i = 2^{\beta-i}$ .

Если каждый показатель  $\alpha, \beta, \gamma$  больше  $i$ , то числа  $a_i, b_i, c_i$  четны. Положим  $a_i = 2a_{i+1}, b_i = 2b_{i+1}, c_i = 2c_{i+1}$ , после подстановки и сокращения на 2 получаем  $2^{i+1} a_{i+1} b_{i+1} - c_{i+1} = 2^{\gamma-(i+1)}$ ,  $2^{i+1} b_{i+1} c_{i+1} - a_{i+1} = 2^{\alpha-(i+1)}$ ,  $2^{i+1} c_{i+1} a_{i+1} - b_{i+1} = 2^{\beta-(i+1)}$ . Продолжаем далее, пока  $i$  не станет равно  $\alpha$ .

Для  $i = \alpha$  имеем  $2^\alpha b_\alpha c_\alpha - a_\alpha = 1$ ,  $2^\alpha a_\alpha b_\alpha - c_\alpha = 2^{\gamma_1}$ ,  $2^\alpha c_\alpha a_\alpha - b_\alpha = 2^{\beta_1}$ , где  $a = 2^\alpha a_\alpha, b = 2^\alpha b_\alpha, c = 2^\alpha c_\alpha$ ,  $0 < \beta_1 = \beta - \alpha < \gamma - \alpha = \gamma_1$ . Тогда  $2^{\gamma_1} - 2^{\beta_1} = (2^\alpha a_\alpha + 1)(b_\alpha - c_\alpha) : 2^{\beta_1}$ ,  $2^{\gamma_1} + 2^{\beta_1} = (2^\alpha a_\alpha - 1)(b_\alpha + c_\alpha) : 2^{\beta_1}$ . Отсюда  $b_\alpha - c_\alpha$  и  $b_\alpha + c_\alpha$  делятся на  $2^{\beta_1}$ , значит,  $c_\alpha$  делится на  $2^{\beta_1-1}$ . Имеем  $c_\alpha \geq 2^{\beta_1-1} = \frac{2^\alpha c_\alpha a_\alpha - b_\alpha}{2}$ ,  $2c_\alpha \geq 2^\alpha c_\alpha a_\alpha - b_\alpha > (2^\alpha c_\alpha - 1)a_\alpha$ . Так как  $a_\alpha > c_\alpha$ , то  $2^\alpha c_\alpha - 1 \leq 1$ , откуда  $c_\alpha = 1$  и  $\alpha = 1$ , т.е.  $c = 2$ . Далее, так как  $b_\alpha - c_\alpha = b_\alpha - 1$  и  $b_\alpha + c_\alpha = b_\alpha + 1$  делятся на  $2^{\beta_1}$ , возможно лишь  $\beta_1 = 1$ , т.е.  $\beta = 2$ .

Подставляя  $\alpha = 1, \beta = 2, c = 2$  в условие задачи, получаем  $2b - a = 2, 2a - b = 4$ , откуда  $3a = 10$  – противоречие.

3. Пусть  $A'$  – точка окружности  $\Gamma$ , диаметрально противоположная точке  $A$ . Так как  $\angle AQA' = 90^\circ$  и  $\angle AQH = 90^\circ$ , точки  $Q, H$  и  $A'$  лежат на одной прямой. Поскольку  $A'B \perp AB$  и  $CH \perp AB$ , имеем  $A'B \parallel CH$ . Аналогично,  $A'C \parallel BH$ . Значит,  $A'BHC$  – параллелограмм, следовательно,  $M$  – середина отрезка  $HA'$ . Пусть прямая  $AH$  пересекает  $\Gamma$  вторично в точке  $E$ . Так как  $AE \perp A'E$ , то  $A'E \parallel MF$  и  $MF$  – средняя линия треугольника  $A'HE$ , т.е.  $F$  – середина отрезка  $HE$ .

В окружностях  $KQH$  и  $EA'H$  отрезки  $HQ$  и  $HA'$  являются диаметрами, значит, эти окружности имеют общую касательную  $t$  в точке  $H$ , при этом  $t \perp MH$  (рис.17). Пусть  $R$  – ра-

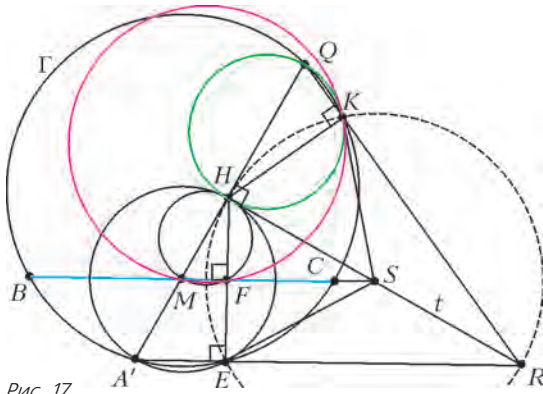


Рис. 17

дикальный центр окружностей  $\Gamma$ ,  $KQH$  и  $EA'H$ . Попарные радикальные оси этих окружностей – это прямые  $QK$ ,  $A'E$  и  $t$ ; все эти прямые проходят через  $R$ . Пусть  $S$  – середина отрезка  $HR$ ; так как  $\angle QKH = \angle HEA' = 90^\circ$ , то четырехугольник  $HERK$  вписанный в окружность с центром  $S$ ; значит,  $SR = SK = SH$ . Тем самым,  $SK$ , как и  $SH$ , касается окружности  $KQH$ . Прямая  $BC$  является серединным перпендикуляром к  $HE$  и поэтому проходит через  $S$ .

Окружность  $HMF$  также касается прямой  $t$  в точке  $H$ ; отсюда  $SM \cdot SF = SH^2 = SK^2$ . Значит, степень точки  $S$  относительно окружности  $MFK$  равна  $SK^2$ , следовательно, прямая  $SK$  касается окружности  $MFK$ .

Итак, прямая  $SK$  касается обеих окружностей  $MFK$  и  $KQH$  в точке  $K$ .

**4.** Достаточно доказать, что прямые  $FK$  и  $GL$  симметричны относительно  $AO$ . Отрезки  $AF$  и  $AG$  – равные по длине хорды окружности  $\Omega$ , они симметричны относительно прямой  $AO$ . Значит, для решения задачи достаточно доказать, что  $\angle KFA = \angle AGL$ .

Имеем  $\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK$  (рис.18). Используя теорему о вписанных углах в окружностях  $\Gamma$ ,  $\Omega$  и окружно-

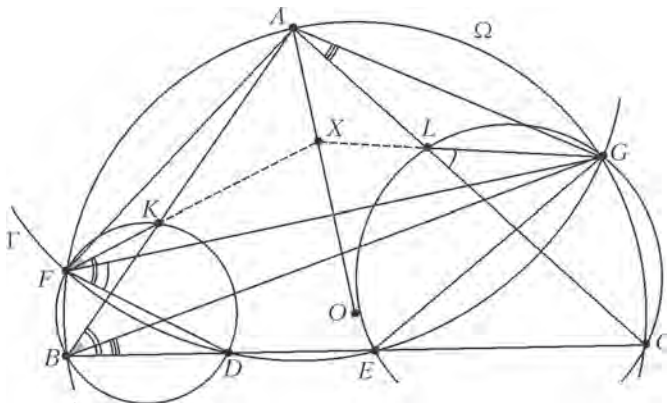


Рис. 18

стях, описанных около треугольников  $BDF$  и  $CEG$ , запишем  $\angle KFA = \angle CEG + \angle GBA - \angle DBK =$

$$= \angle CEG - \angle CBG = \angle CLG - \angle CAG = \angle AGL.$$

Нужное равенство углов  $\angle KFA = \angle AGL$  получено.

**5.**  $f(x) = x$  и  $f(x) = 2 - x$ .

Обозначим через  $(*)$  функциональное уравнение из условия задачи. Легко проверить, что функции, указанные в ответе, удовлетворяют  $(*)$ . Достаточно доказать, что других таких функций нет.

Пусть  $f$  – функция, удовлетворяющая  $(*)$ . Полагая  $y = 1$  в

$(*)$ , получаем

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1); \quad (1)$$

иначе говоря,  $x + f(x + 1)$  является неподвижной точкой функции  $f$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим два случая.

*Случай 1:*  $f(0) \neq 0$ .

Подставляя  $x = 0$  в  $(*)$ , имеем

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0).$$

Значит, если  $y_0$  – неподвижная точка для  $f$ , то, подставляя  $y = y_0$  в написанное выше равенство, получаем  $y_0 = 1$ . Значит, из (1) следует, что  $x + f(x + 1) = 1$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Таким образом,  $f(x) = 2 - x$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

*Случай 2:*  $f(0) = 0$ .

Полагая  $y = 0$  и заменяя  $x$  на  $x + 1$  в  $(*)$ , получаем

$$f(x + f(x + 1) + 1) = x + f(x + 1) + 1. \quad (2)$$

Из  $(*)$  подстановка  $x = 1$  дает

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + yf(1). \quad (3)$$

Подставляя  $x = -1$  в (1), мы видим, что  $f(-1) = -1$ . Затем подставляем  $y = -1$  в (3) и получаем  $f(1) = 1$ . Следовательно, (3) сводится к

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y. \quad (4)$$

Из (4) следует, что если  $y_0$  и  $y_0 + 1$  являются неподвижными точками для  $f$ , то  $y_0 + 2$  также является неподвижной точкой. Значит, из (1) и (2) вытекает, что  $x + f(x + 1) + 2$  является неподвижной точкой для  $f$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , т.е.

$$f(x + f(x + 1) + 2) = x + f(x + 1) + 2.$$

Замена  $x$  на  $x - 2$  приводит предыдущее равенство к виду

$$f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1).$$

С другой стороны, положив  $y = -1$  в  $(*)$ , получаем

$$f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1) - f(x) - f(-x).$$

Следовательно,  $f(-x) = -f(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , т.е. функция  $f$  нечетная.

Наконец, подставляя в  $(*)$  вместо  $(x, y)$  пару  $(-1, -y)$  и используя тот факт, что  $f(-1) = -1$ , получаем

$$f(-1 + f(-y - 1)) + f(y) = -1 + f(-y - 1) + y.$$

Так как  $f$  – нечетная функция, предыдущее равенство принимает вид

$$-f(1 + f(y + 1)) + f(y) = -1 - f(y + 1) + y.$$

Прибавляя это равенство к (4), заключаем, что  $f(y) = y$  для всех  $y \in \mathbb{R}$ .

**6.** (Решение Н.Гладкова)

Рассмотрим ряд натуральных чисел. Начнем пошаговый процесс, на  $k$ -м шаге которого будем вычеркивать число  $k + a_k$ . Тогда после  $k$ -го шага окажутся вычеркнутыми  $k$  чисел из множества  $\{1, 2, \dots, k + 2015\}$ . Если число  $a \leq k + 1$  не вычеркнуто после  $k$ -го шага, то оно останется невычеркнутым всегда. Назовем такие числа (которые остаются невычеркнутыми всегда) *особыми*. Количество особых чисел не превосходит 2015, так как иначе для  $k$ , большего 2016-го по счету особого числа, среди чисел  $\{1, 2, \dots, k + 2015\}$  хотя бы 2016 особые, значит, вычеркнуто не более  $k - 1$  чисел – противоречие.

Пусть  $n_1 < \dots < n_t$  – все особые числа. Их количество  $t$  и будет нужным нам числом  $b$ . В качестве  $N$  зафиксируем любое число, большее  $n_t$ . Возьмем любое  $k \geq N$ . Рассмотрим ситуацию после  $k$ -го шага: среди чисел  $\{1, 2, \dots, k\}$  не вычеркнуты лишь особые числа (их  $t$  штук, значит, среди чисел  $\{k + 1, \dots, k + 2015\}$  вычеркнуто ровно  $t$  чисел, пусть это числа  $k + b_{k,1} < k + b_{k,2} < \dots < k + b_{k,t}$ . Заметим, что  $b_{k,1} = 1$ , так как  $k + 1$  неособое и оно должно быть вычеркнуто не позже  $k$ -го шага. Аналогичные рассуждения с заменой  $k$  на  $k + 1$  показы-



вают, что после  $(k + 1)$ -го шага среди чисел  $\{k + 2, \dots, k + 2016\}$  вычеркнуто тоже ровно  $t$  чисел, и это числа  $k + b_{k,2}, \dots, k + b_{k,t}$  и число  $k + 1 + a_{k+1}$ . Положим  $f(k) = b_{k,1} + b_{k,2} + \dots + b_{k,t}$ . Тогда в выражении  $f(k + 1)$  встречаются те же слагаемые  $b_{k,2}, \dots, b_{k,t}$ , уменьшенные на 1, а также число  $a_{k+1}$ . Таким образом,  $f(k + 1) - f(k) = a_{k+1} - t$ . Но тогда при  $n > m \geq N$  имеем

$$f(n) - f(m) = \sum_{j=m+1}^n (a_j - t).$$

При фиксированном  $t \in \{1, 2, \dots, 2015\}$  и  $k \geq N$  имеем

$$1 + 2 + \dots + t \leq f(k) \leq 1 + (2015 + 2014 + \dots + (2015 - t + 2)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |f(n) - f(m)| &\leq 1 + (2015 + 2014 + \dots + (2015 - t + 2)) - \\ &\quad - (1 + (t + (t - 1) + \dots + 2)) = \\ &= (2015 - t)(t - 1) \leq \frac{((2015 - t) + (t - 1))^2}{4} = 1007^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### XLVI МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПАДА

#### Задача 1

**A1.**  $T_{\text{II}} = \left( \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} = 5,76 \cdot 10^3 \text{ К.}$  **A2.**  $P = \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\text{II}}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}.$

**A3.**  $n_{\gamma}(v) = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} v^2 \exp\left(-\frac{hv}{k_B T_{\text{II}}}\right).$

**A4.**  $P_{\text{пол}} = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_{\text{II}}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} x_3 (x_3^2 + 2x_3 + 2) e^{-x_3}.$

**A5.**  $\eta = \frac{x_3}{6} (x_3^2 + 2x_3 + 2) e^{-x_3}.$

**A6.** См. рис.19;  $\eta(0) = 0, \eta(\infty) = 0, \left. \frac{d\eta}{dx_3} \right|_{x_3=0} = \frac{1}{3},$

$\left. \frac{d\eta}{dx_3} \right|_{x_3 \rightarrow \infty} = 0.$

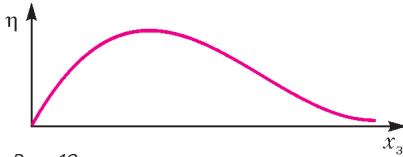


Рис. 19

**A7.**  $x_3^3 - x_3^2 - 2x_3 - 2 = 0; x_0 = 2,27; \eta(x_0) = 0,457.$

**A8.**  $\eta_{\text{Si}} = 0,457.$  **A9.**  $\Omega = -\frac{3GM_{\odot}^2}{5R_{\odot}}.$

**A10.**  $\tau = 1,88 \cdot 10^7 \text{ лет.}$  **B1.**  $\Phi_v = 2 \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2 \Delta E} = 6,8 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$

**B2.**  $f = \frac{6}{5} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$  **B3.**  $E_{\text{пер}} = \alpha \Delta t + \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) m_e c^2.$

**B4.**  $T_C = 1,13 \cdot 10^7 \text{ К.}$

#### Задача 2

**A1.**  $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$  **A2.**  $v_2 = v_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$

**A3.**  $A(\alpha) = mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2};$

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha) \sqrt{x_1^2 + \alpha^2}}{\alpha \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}}.$

**B1.**  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$  **B2.**  $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left( \frac{n(y)}{n_0 \sin i_0} \right)^2 - 1}.$

**B3.**  $x = \frac{n_0}{k} \ln \left( \frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left( \frac{n_0 - ky}{n_0} \right)^2 - 1} \right).$

**B4.**  $x_0 = 24,0 \text{ см.}$  **C1.**  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta A}{h}.$  **C2.**  $\Delta\varphi_{CD} = 0.$

**D1.**  $U_1 = 1,139 \cdot 10^3 \text{ В.}$  **D2.**  $\beta = 5,13.$

**D3.**  $\Delta y = -0,0162 \text{ мм} = -16,2 \text{ мкм.}$

**D4.**  $I_{\text{min}} = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$

#### Задача 3

**A1.**  $\Delta E = 208,684 \text{ МэВ.}$

**A2.**  $N = 1,702 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}.$

**A3.**  $Q = 4,917 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^3.$

**A4.**  $F(Q, a, \lambda) = \frac{Qa^2}{\lambda}.$

**A5.**  $a_{\text{max}} \approx 8,267 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

**B1.** См. рис. 20.

**B2.**  $v = \frac{Av_b}{A+1}, V = \frac{v_b}{A+1}.$

**B3.**  $G = (\alpha, \theta) = 1 - \frac{(1-\alpha)(1-\cos\theta)}{2}.$

**B4.**  $f = 0,181.$

**C1.**  $H = 5,866 \text{ м, } R = 3,175 \text{ м.}$

**C2.**  $F = 387, M = 9,892 \cdot 10^4 \text{ кг.}$

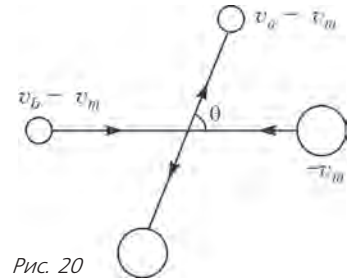


Рис. 20

### XXII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА». МАТЕМАТИКА

#### Младшая лига

**1. Указание.** Расставьте числа в таблице как попало. При этом, возможно, кое-где в таблице найдутся соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются ровно на 1. Назовем такую сторону *плохой*, а числа, отличающиеся на 1, – *конфликтующими*. Проверьте, что для каждого конфликтующего числа  $a$  существует довольно много чисел, которые можно поменять с  $a$  так, чтобы количество плохих сторон уменьшилось.

**2.** Пусть существует три забавных числа подряд. Тогда одно из них дает остаток 2 при делении на 3, но по условию оно должно делиться на свою сумму цифр, увеличенную на 1, таким образом, оно делится на 3, а его сумма цифр не делится на 3. Это невозможно. Значит, подряд идущих забавных чисел не может быть более двух. Осталось привести пример двух подряд идущих забавных чисел: 39 и 40.

**3.** Пусть  $K$  – точка пересечения перпендикулярных биссектрис из условия задачи (рис.21). Тогда

$$\angle KCB + \angle KBD + \angle DBC = 90^\circ.$$

Рассмотрим углы треугольника  $ABC$ :

$$180^\circ = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC =$$

$$= 2\angle KCB + 2\angle ABD + \angle DBC + \angle BAC.$$

Следовательно,  $\angle DBC = \angle CAB$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $BDC$  подобны по двум углам. Обозначим  $BC = a, AD = DC = b/2$ . Тогда из подобия  $\frac{a}{b/2} = \frac{b}{a}$ , откуда  $b = a\sqrt{2}$ . Теперь очевидно, что максимально возможное значение угла  $BAC$  в треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a$  и  $a\sqrt{2}$  реализуется в том случае, когда прямая  $AB$  касается окружности с цент-

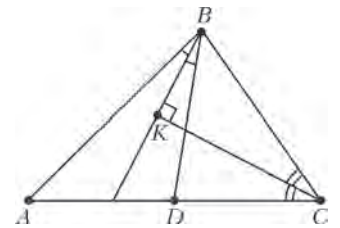


Рис. 21

ром  $C$  и радиусом  $a$ . В этом случае треугольник  $BAC$  равнобедренный прямоугольный и  $\angle BAC = 45^\circ$ . Отметим, что условие задачи для этого треугольника выполняется.

4. В десятичной записи числа  $\sqrt[k]{n}$  после запятой стоят нужные цифры, если число  $\sqrt[k]{n}$  для некоторого натурального  $m$  лежит в промежутке  $[m + 0,2015; m + 0,2016)$  длины  $\varepsilon = 0,0001$ , или, что то же самое,

$$n \in \left[ (m + 0,2015)^k; (m + 0,2016)^k \right).$$

Поэтому для доказательства существования искомого  $n$  нам достаточно найти 10 промежутков

$$\Delta_k = \left[ (m_k + 0,2015)^k; (m_k + 0,2016)^k \right),$$

содержащих одно и то же натуральное число. Мы добьемся этого, построив последовательность вложенных промежутков  $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta_{10}$ , в которой промежуток  $\Delta_1$  имеет длину больше 1 и, следовательно, содержит натуральное число. Отрезок  $\Delta_{10}$  при всех достаточно больших  $m_{10}$  имеет длину больше 1 и, следовательно, содержит натуральное число.

Чтобы промежуток  $\Delta_k$  содержался в  $\Delta_{k+1}$ , достаточно, чтобы имело место включение

$$\begin{aligned} & [m_k + 0,2015; m_k + 0,2016) \subset \\ & \subset \left[ (m_{k+1} + 0,2015)^{\frac{k+1}{k}}; (m_{k+1} + 0,2016)^{\frac{k+1}{k}} \right). \end{aligned}$$

Найти натуральное  $m_k$  по заданному  $m_{k+1}$  заведомо удастся, если длина последнего промежутка будет больше 2.

Докажем, что при каждом натуральном  $k$

$$(x + \varepsilon)^{\frac{k+1}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}} > 2$$

при всех достаточно больших  $x$ . Действительно,

$$(x + \varepsilon)^{\frac{k+1}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}} = x^{\frac{k+1}{k}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right)^{\frac{k+1}{k}} > \frac{k+1}{k} \cdot \frac{\varepsilon}{x} \cdot x^{\frac{k+1}{k}} = \frac{k+1}{k} \cdot x^{\frac{1}{k}} \cdot \varepsilon$$

(мы воспользовались неравенством Бернулли). При  $x > 20000^k$  последнее выражение, разумеется, больше 2.

Поскольку  $m_k \geq (m_{k+1} + 0,2015)^{\frac{k+1}{k}} - 0,2015$ , за счет выбора достаточно большого  $m_{10}$  мы можем сделать достаточно большими остальные  $m_k$  и, следовательно, построить требуемый набор отрезков.

5. Во-первых, заметим, что из нечетного числа с помощью такой операции получается четное число. Далее, пусть нам дано число  $2^k a$ ,  $k \geq 1$  и  $a$  нечетное. Тогда с ним будет происходить следующее:

$$2^k a \rightarrow 2^{k-1} 3a \rightarrow 2^{k-2} 3^2 a \rightarrow \dots \rightarrow 3^k a.$$

Теперь докажем по индукции, что мы получим нечетное число, делящееся на сколь угодно большую степень тройки. База проверена выше: мы получили нечетное число, делящееся на 3. Теперь, если уже получено число  $3^n a$ ,  $n \geq 1$  и  $a$  нечетное, то, применяя операцию три раза подряд, получим

$$3^n a \rightarrow 2^2 3^{n-1} a \rightarrow 2^3 3^n a \rightarrow 2^3 3^n \rightarrow 3^{n+1} a,$$

что и требовалось.

6. Рассмотрим все «двойные» разности  $a_{n+2} - a_n$ , не превосходящие  $2015 \cdot 6$ . Любая такая разность есть сумма двух «простых» разностей:  $a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)$ . У двойных разностей, не превосходящих  $2015 \cdot 3$ , (количество таких разностей равно  $2015 \cdot 2$ ) обе простые разности не превосходят  $2015 \cdot 3$ .

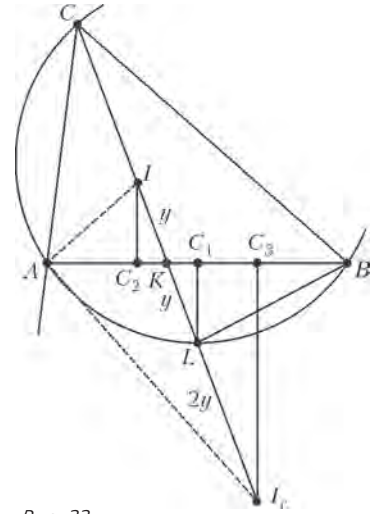
Для двойных разностей от  $2015 \cdot 3 + 1$  до  $2015 \cdot 6$  (таких разностей  $2015 \cdot 3$ ) хотя бы одна из простых разностей не превосходит  $2015 \cdot 3$ . При этом каждую простую разность мы посчитали не более двух раз, а всего простых разностей, не превосходящих  $2015 \cdot 3$ , мы насчитали  $2015 \cdot (2 \cdot 2 + 3) = 2015 \cdot 7$ . Противоречие.

7. Пусть  $C_1$  – середина  $AB$ ,  $I_c$  – центр вневписанной окружности со стороны  $AB$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороны  $AB$  (рис. 22). Так как  $C_1$  делит  $C_2 C_3$  пополам, то  $IL = LI_c$ .

Осталось заметить, что внешняя и внутренняя биссектрисы делят отрезок  $CK$  в одинаковом отношении внутренним и внешним образом, т.е.

$$\frac{CI}{IK} = \frac{CI_c}{I_c K} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{CI}{\frac{1}{2} IL} = \frac{CI + 2IL}{\frac{3}{2} IL} \Leftrightarrow IL = I_c K. \quad \text{Рис. 22}$$



8. Пусть цвета – это остатки 0, 1, 2 по модулю 3. Мы предьявим такие линейные функции  $f_A(D, B)$ ,  $f_B(A, C)$ ,  $f_C(B, D)$ ,  $f_D(C, A)$ , чтобы для любых значений  $A, B, C, D$  хотя бы одна из функций имела значение, совпадающее со значением соответствующей переменной по модулю 3. Заметим, что

$$\begin{aligned} (A + B + C)^2 + (A - C + D)^2 + (A - B - D)^2 + (B - C - D)^2 = \\ = 3(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \equiv 0 \pmod{3}. \quad (*) \end{aligned}$$

Если при каких-то  $A, B, C, D$  каждое из выражений

$$A + B + C, A - C + D, A - B - D, B - C - D \quad (**)$$

оказалось не равным 0 по модулю 3, то квадраты выражений давали бы остатки 1 по модулю 3, и тогда сумма (\*) не могла бы делиться на 3. Значит, для любых целых  $A, B, C, D$  хотя бы одно из выражений (\*\*) обращается в 0 по модулю 3.

Положим тогда  $f_B = -A - C$ ,  $f_D = C - A$ ,  $f_A = B + D$ ,  $f_C = B - D$ .

Переводя на язык простых рецептов, мудрец  $A$  называет в качестве своей гипотезы сумму  $B + D$ , мудрец  $B$  называет  $-A - C$ , мудрец  $C$  называет  $B - D$ , мудрец  $D$  называет  $C - A$ .

### Старшая лига

1. Будем давать вратарям, пропустившим гол, самые маленькие из имеющихся номеров: 1, 2, ..., а нападающим, забившим гол, – самые большие:  $n, n - 1, \dots$  Для удобства рассуждений будем полагать, что игроки, недостаточно хорошо забивавшие или пропускавшие голы, остаются пронумерованными. Для каждого  $n$  проверим возможность такой нумерации индукцией по  $k$ .

База индукции  $k = 0$  проверки не требует.

Переход. Допустим, что забито  $k + 1$  голов. Не обращая внимания на последний гол, пронумеруем футболистов по предположению индукции. Тогда каждый нападающий и каждый вратарь, осуществившие совместный гол, имеют разность номеров не меньше  $n - k$ , и это требование жестче того, что требуется для случая  $k + 1$  голов.

Рассмотрим  $(k + 1)$ -й гол. Пусть вратарь, пропустивший этот гол, имеет номер  $l$  (если вратарь еще не пронумерован, возьмем в качестве  $l$  наименьший свободный номер). Теперь заменим номер этого вратаря на 1, а у всех вратарей с номерами от 1 до  $l - 1$  увеличим номер на 1. Если у нападающего, забившего  $(k + 1)$ -й гол, уже есть номер, оставим его без изменения, а если еще нет номера – присвоим ему наибольший

свободный номер. Нетрудно видеть, что все пронумерованные игроки имеют различные номера и требования условия задачи выполнены.

**3.** Будем доказывать утверждение индукцией по степени многочлена  $P$ . База  $P(x, y) \equiv 0$ . Рассматривая  $P(x, y)$  как многочлен от  $x$ , разделим его на  $x - \sqrt{2}y$ :

$$P(x, y) = (x - \sqrt{2}y)Q(x, y) + R(y).$$

Теперь подставим  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = 1$  и воспользуемся свойством нашего многочлена, получим

$$P(\sqrt{2}, 1) = P(\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 1) = P(\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1), \sqrt{2} + 1) = \\ = P(\sqrt{2}(3 + 2\sqrt{2}), 3 + 2\sqrt{2}) = \dots$$

Заметим, что если  $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ , то  $\frac{x+2y}{x+y} = \sqrt{2}$ . Таким образом, на прямой  $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$  имеется бесконечно много точек с одинаковым значением  $P(x, y)$ , а значит, и  $R(y)$ . Тогда  $R(y)$  – константа, равная  $P(0, 0)$ . Проведя аналогичные рассуждения с прямой  $x + \sqrt{2} = 0$ , получаем, что

$$P(x, y) = (x^2 - 2y^2)Q(x, y) + P(0, 0).$$

Подставляя это равенство в условие, получаем, что для многочлена  $Q$

$$Q(x + 2y, x + y) = -Q(x, y).$$

Очевидно, что для многочлена  $Q$  тоже можно найти на прямых  $x \pm \sqrt{2}y = 0$  бесконечно много точек с равными значениями. Для этого проследим за чередованием знаков или воспользуемся тождеством

$$Q(x, y) = -Q(x + 2y, x + y) = Q(3x + 4y, 2x + 3y).$$

Заметив, что  $Q(0, 0) = 0$ , получаем, что

$$P(x, y) = (x^2 - 2y^2)^2 T(x, y) + P(0, 0),$$

причем для многочлена  $T$  выполняется исходное тождество

$$T(x + 2y, x + y) = T(x, y).$$

Применяя к  $T$  индукционное предположение, получаем требуемое представление.

**4.** Пусть  $n = 2k$ . Тогда, если  $n! = ab^2$  – представление в нужном виде, то для числа  $C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!k!}$  таким представлением будет  $ad^2$ , где  $d = \frac{b}{k!}$ . Таким образом,  $a = \frac{C_{2k}^k}{d^2}$ . Нам осталось оценить  $C_{2k}^k$  и  $d^2$ .

Так как  $C_{2k}^k$  – наибольшее число в соответствующей строчке треугольника Паскаля, то

$$\frac{1}{2k+1} \cdot 2^{2k} < C_{2k}^k < 2^{2k}.$$

Следовательно,  $a < 2^n$ .

Чтобы оценить  $a$  снизу, оценим  $d^2$ . Каждое простое число  $p$  входит в разложение  $n!$  в степени

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \dots,$$

поэтому в  $C_{2k}^k$  оно входит в степени

$$\left[ \frac{2k}{p} \right] - 2 \left[ \frac{k}{p} \right] + \left[ \frac{2k}{p^2} \right] - 2 \left[ \frac{2k}{p^2} \right] + \dots$$

При этом для любого  $m$  выполнено  $0 \leq \left[ \frac{2k}{m} \right] - 2 \left[ \frac{k}{m} \right] \leq 1$ , поэтому простые, большие  $\sqrt{2k}$ , входят в  $C_{2k}^k$  в степени, не большей 1, а значит, не входят в разложение числа  $d^2$ . А простые  $p$ , меньшие  $\sqrt{2k}$ , входят в разложение числа  $d^2$  сте-

пени не более  $\log_p 2k \leq \log_2 2k$ . Тогда для больших  $k$

$$1 \leq d^2 \prod_{p < \sqrt{k}} p^{\log_p 2k} \leq (\sqrt{2k})^{\sqrt{2k} \log_2 2k} \leq 2^{\frac{1}{2} \sqrt{2k} \log_2 2k \log_2 2k} < 2^{(2k)^{\frac{2}{3}}}.$$

Таким образом,  $a > \frac{1}{2k+1} \cdot 2^{2k} 2^{-(2k)^{\frac{2}{3}}} > 2^{n(-\frac{1}{2}\epsilon)}$  для достаточно больших  $n$ .

Если же  $n = 2k + 1$ , то, воспользовавшись уже доказанным утверждением для  $n = 2k$ , получим

$$2^{n(1-\epsilon)} < 2^{2k(1-\frac{1}{2}\epsilon)} \cdot \frac{1}{2k+1} < a < 2^{2k} (k+1) < 2^{n(1+\epsilon)}$$

для достаточно больших  $k$ .

**6.** Для любого  $x$  выполнено неравенство  $x(ax + b) \geq 0$ , а при  $|x| > 1$  имеем

$$x(ax + b) \geq |x|(a|x| - b) \geq 2(2a - b) \geq 2a \geq 30.$$

Остальные слагаемые оцениваются так же. Поэтому числа от 1 до 29 могут быть представлены лишь с помощью  $x, y, z \in \{0, 1, -1\}$ . Значит, для этих чисел есть не более 27 возможностей. Противоречие.

**7.**  $90^\circ$ .

Проведем внешнюю биссектрису из вершины  $B$ , точку пересечения с  $AC$  обозначим через  $F$ . В любом треугольнике прямая  $D - E - F$  перпендикулярна  $IO$ , а как показано в задаче 7 младшей лиги, при данном условии  $IO \perp CC_1$ .

**8.**  $k^2$  отрезков.

Для начала заметим, что если получившийся граф на плоскости не связан, то можно так провести дополнительные (не обязательно прямые) ребра, что он станет связан, но новых циклов не образуется. Условие на части, на которые разбита плоскость, при этом сохранится. Обозначим  $V$  – число точек,  $E$  – число проведенных ребер,  $F$  – число частей, на которые разделилась плоскость. Также пусть  $E_0$  – число ребер в периметре бесконечной части, назовем эти ребра *граничными*. Так как у всех внутренних частей хотя бы по 4 ребра, получаем

$$2E \geq 4(F - 1) + E_0.$$

С другой стороны, по формуле Эйлера  $V - E + F = 2$ . Выразив  $F$  и подставив в предыдущее равенство, получаем

$$E \leq 2V - \frac{1}{2}E_0 - 2. \quad (*)$$

Если  $E_0 \geq 2k$ , то мы получаем

$$E \leq 2 \cdot \left( \frac{k(k+1)}{2} + 1 \right) - k - 2 = k^2.$$

Пусть  $E_0 < 2k$ . Рассмотрим некоторый параллелограмм разбиения. Возьмем его ребро и (если оно не граничит с внешней частью) перейдем к соседнему параллелограмму через это ребро; возьмем его ребро, параллельное исходному. Повторяя процедуру несколько раз, мы получим граничное ребро, *соответствующее* исходному. Так можно сделать с каждым ребром параллелограмма. Тогда сами граничные ребра разбиваются на пары параллельных, и каждой паре непараллельных граничных ребер соответствует как максимум один параллелограмм разбиения. Значит, количество параллелограммов меньше  $\frac{k(k-1)}{2}$ , и по формуле (\*) получаем

$$E < 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k = k^2.$$

Осталось построить пример разбиения, содержащего  $k^2$  отрезков. Рассмотрим правильный  $2k$ -угольник. Разобьем его на параллелограммы, как показано на рисунке 23 (для примера мы взяли  $k = 8$ ). Здесь действительно  $\frac{k(k+1)}{2} + 1$  вершин, поскольку на ломаных, выходящих из вершины  $A$  и разделяющих темные и белые полосы, лежат кроме  $A$  соответственно 1, 2, 3, ...,  $k$  вершин. При этом на картинке имеет-



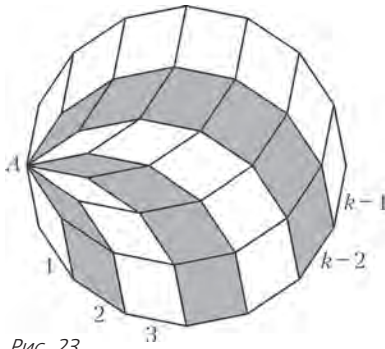


Рис. 23

ся  $k(k-1)/2$  параллелограммов – это ясно, если подсчитывать параллелограммы, лежащие в полосах. Таким образом, число вершин и число параллелограммов совпадают с количествами, приведенными в сделанной оценке, а значит, число отрезков по формуле Эйлера должно быть равно  $k^2$ .

**XXII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА». ФИЗИКА**

1. Выразив массу меда в бочке двумя способами – через его уровень  $h$  и через момент времени  $t$  – и приравняв эти выражения, получаем связь между  $h$  и  $t$ :

$$M \frac{h}{H} = \mu t.$$

Высота  $x$  центра масс системы «бочка–мед» над уровнем дна равна

$$x = \frac{mH^2 + Mh^2}{2(mH + Mh)}.$$

После дифференцирования и упрощения получаем

$$x'(h) = \frac{M^2 h^2 + 2MmHh - MmH^2}{2(mH + Mh)^2}.$$

1) Рассмотрим малый промежуток времени  $\Delta t$  сразу после начала заполнения бочки. Тогда из приведенных выше соотношений получаем

$$\Delta h = \frac{\mu H}{M} \Delta t, \\ \frac{\Delta x}{\Delta h} = x'(0) = -\frac{M}{2m}.$$

Отсюда находим искомую начальную скорость:

$$v_0 = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = \frac{\mu H}{2m} = 8 \text{ мм/с}.$$

2) Очевидно, что высоты центров масс пустой бочки и полной бочки с медом одинаковы и равны  $H/2$ , а в случае частичного заполнения высота меньше  $H/2$ . Поэтому существует минимальное значение  $x$ , при котором скорость центра масс обращается в ноль, т.е. заведомо минимальна по модулю. Для поиска экстремума  $x(h)$  приравняем производную  $x'(h)$  к нулю и придем к уравнению

$$Mh^2 + 2mHh - mH^2 = 0,$$

которое имеет единственный положительный корень

$$h = \frac{m}{M} \left( \sqrt{1 + \frac{M}{m}} - 1 \right) H.$$

Такому уровню меда в бочке соответствует время

$$t_0 = \frac{Mh}{\mu H} = \frac{m}{\mu} \left( \sqrt{1 + \frac{M}{m}} - 1 \right) = 125 \text{ с}.$$

2. Чтобы оценить  $t_1$  и  $t_2$ , заменим аргон и этан на произвольный газ, имеющий молярную массу  $M$  и плотность  $\rho$  в жидком состоянии при низких температурах. Будем считать молекулы газа кубиками с ребром  $d$ , которые в жидком состоянии уложены максимально плотно. Тогда из формулы  $M = d^3 \rho N_A$ , где  $N_A$  – число Авогадро, находим

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}.$$

Концентрацию  $n$  и длину свободного пробега молекул газа  $\lambda$  можно представить в виде

$$n = \frac{p}{kT}, \quad \lambda = \frac{1}{nd^2} = \frac{kT}{p} \left( \frac{\rho N_A}{M} \right)^{2/3},$$

где  $k$  – постоянная Больцмана. Пусть  $x_i$  – модуль перемещения примесной молекулы после  $i$  соударений,  $\Phi$  – угол отклонения при очередном соударении. Тогда по теореме косинусов можно записать

$$x_{i+1}^2 = x_i^2 + \lambda^2 + 2x_i \lambda \cos \Phi,$$

где предполагается, что длина свободного пробега примесных молекул тоже равна  $\lambda$ . После усреднения этого выражения по всевозможным углам  $\Phi$  получаем

$$\langle x_{i+1}^2 \rangle = \langle x_i^2 \rangle + \lambda^2 = (i+1)\lambda^2.$$

Средняя скорость молекул газа (без учета числового коэффициента) имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная. За некоторое время  $t$  примесная молекула пройдет путь  $L = i\lambda = vt$  и сместится на среднее расстояние

$$x = \sqrt{\langle x_i^2 \rangle} = \sqrt{\lambda vt}.$$

Искомое время  $t$  по порядку величины равно времени, которое требуется примесной молекуле для смещения от одного торца цилиндра до другого, т.е. на расстояние  $x = V/S$ . Таким образом, из записанных выше выражений получаем

$$t = \frac{x^2}{\lambda v} = \frac{V^2}{S^2} \frac{p}{kT} \left( \frac{M}{\rho N_A} \right)^{2/3} \sqrt{\frac{M}{RT}}.$$

1) Аргон и этан с рассматриваемым изотопным составом молекул имеют одинаковую молярную массу  $M$ , поэтому в искомом отношении  $t_1/t_2$  остаются только плотности:

$$\frac{t_1}{t_2} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{2/3} = 0,66.$$

2) Оценка времени  $t_1$  дает

$$t_1 = \frac{V^2}{S^2} \frac{p}{kT} \left( \frac{M}{\rho_1 N_A} \right)^{2/3} \sqrt{\frac{M}{RT}} = 125 \text{ с} \sim 10^2 \text{ с}.$$

3. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Квант» (см. задачу Ф2392).

4. Пусть  $S$  – площадь пластин конденсатора,  $q$  – заряд конденсатора. Тогда напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого одной пластиной, и силу  $F$  взаимодействия пластин можно записать в виде

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \quad \text{и} \quad F = qE = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

Поскольку пластины раздвигали медленно, можно считать, что в течение одного периода колебаний  $T$  амплитуда  $Q$  колебаний заряда, циклическая частота  $\omega$  и начальная фаза  $\Phi$  неизменны, а зависимость заряда конденсатора от времени задается формулой

$$q = Q \sin(\omega t + \Phi).$$

Вычислим среднюю за период силу взаимодействия пластин:

$$F_{\text{cp}} = \frac{\langle q^2 \rangle}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2\epsilon_0 S} \frac{1}{T} \int_0^T q^2 dt = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \Phi) dt = \\ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S T} \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2(\omega t + \Phi))}{4\omega} \right) \Big|_0^T = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S T} \frac{T}{2} = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 S}.$$

Пусть  $x$  – расстояние между пластинами, тогда элементарная работа внешних сил при раздвигании пластин на  $dx$  будет

равна

$$dA = F_{cp} dx = \frac{Q^2 dx}{4\epsilon_0 S}.$$

Используя для емкости плоского конденсатора формулу  $C = \epsilon_0 S/x$ , выразим изменение энергии колебаний при том же раздвигании пластин:

$$\begin{aligned} dW &= d\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = d\left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}\right) = \\ &= \frac{2Qx dQ + Q^2 dx}{2\epsilon_0 S} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} (2x dQ + Q dx). \end{aligned}$$

Согласно закону изменения энергии  $dW = dA$ , запишем

$$\frac{Q}{2\epsilon_0 S} (2x dQ + Q dx) = \frac{Q^2 dx}{4\epsilon_0 S},$$

откуда после упрощения, интегрирования и потенцирования получим

$$4 \frac{dQ}{Q} + \frac{dx}{x} = 0, \quad 4 \ln Q + \ln x = \text{const}, \quad Q^4 x = \text{const}.$$

Величина  $Q^4 x$  является адиабатическим инвариантом, т.е. не изменяется при медленных изменениях других параметров системы. Адиабатические инварианты встречаются в самых разных областях, например в курсе теоретической механики и вычислительной математики.

По условию задачи частота колебаний увеличилась в  $n$  раз, значит (согласно формуле  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ), емкость  $C$  уменьшилась в  $n^2$  раз, (согласно выражению  $C = \epsilon_0 S/x$ ) расстояние  $x$  увеличилось в  $n^2$  раз, (согласно инварианту  $Q^4 x = \text{const}$ ) амплитуда  $Q$  уменьшилась в  $\sqrt{n}$  раз, (согласно формуле

$W = Q^2/(2C)$ ) энергия  $W$  увеличилась в  $n$  раз.

Таким образом, искомая энергия колебаний увеличилась в  $n$  раз, т.е. так же, как частота колебаний.

(Любопытно, что поводом для создания этой задачи стало обнаружение в книге одной задачи с неверным авторским решением и последующее упорство ряда учителей в своей ошибке. Указанную задачу с неверным решением можно найти по ссылке: <https://yadi.sk/i/HhALV8tThQrSi>.)

5. Пусть  $x$  и  $y$  – расстояния от линзы до жучка и его изображения соответственно, тогда из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

находим

$$y = \frac{xF}{x - F}.$$

Выразим первую и вторую производные  $y(x)$  по времени:

$$y' = \frac{x'F^2}{(x - F)^2}, \quad y'' = \frac{F^2(2x' - x''(x - F))}{(x - F)^3}.$$

Расстояние между предметом и изображением и скорость их удаления друг от друга равны, соответственно,

$$l = x + y \quad \text{и} \quad l' = x' \left(1 - \frac{F^2}{(x - F)^2}\right).$$

Действительное изображение наблюдается при  $x > F$ , причем  $l$  растет и стремится к бесконечности при приближении к любой из границ промежутка  $(F; +\infty)$ , значит, на этом интервале должен быть хотя бы один минимум. Из условия нулевой относительной скорости ( $l' = 0$ ) находим положение единственного экстремума в нужной области:  $x = 2F$ . Скорость  $u$  жучка в этой точке найдем из формулы для равноускоренного движения:  $u = 2\sqrt{aF}$ . В результате получаем

$$|v| = 2\sqrt{aF} \quad \text{и} \quad |w| = 7a.$$

Известно, что расстояние между предметом и изображением минимально при симметричном ходе лучей, когда предмет и

изображение находятся в так называемых двойных фокусах ( $x = y = 2F$ ). Из симметрии же формулы тонкой линзы относительно перестановки  $x$  и  $y$  можно было сразу понять, что скорости предмета и изображения будут одинаковы при  $x = y$ . Таким образом, единственный нетривиальный вопрос задачи – про ускорение.

## ИНТЕГРАЛ И ОЦЕНКИ СУММ

(см. «Квант» №4)

1. Пусть  $u_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}$ . Заметим, что

$$u_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}} = \frac{\sqrt[3]{k^2}}{k(k+1)} = \sqrt[3]{k^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

По известной школьной формуле,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \right),$$

так что

$$u_k = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right) \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{k}{k+1}} + \sqrt[3]{\frac{k^2}{(k+1)^2}} \right).$$

Поэтому

$$u_k < 3 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right).$$

Сложив полученные неравенства при  $k = 1, 2, \dots, n$ , получим

$$u_1 + \dots + u_n < 3 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right) < 3.$$

2. Воспользуйтесь неравенствами (3) статьи, а также тем, что

$$\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

3. Следует из неравенств (3) статьи и формулы  $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$ .

4. Воспользуйтесь неравенством

$$\int_k^n \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}} < \int_k^n \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}},$$

а затем неравенством (3') статьи при должным образом подобранном  $k$ .

5.  $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx$ , а  $\int_n^{n+1} f(x) dx > f(n+1)$ .

6. а) Ряд расходится, поскольку (например)  $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{3n}$ , так что для него  $S_n > \frac{1}{3}H_n$ .

б) Сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

в) Расходится, так как  $\int_2^n \frac{x}{x \ln x} = \ln \ln n - \ln \ln 2$ .

8. Рассуждения вполне аналогичны тем, с помощью которых доказывались неравенства (3) и (3') в статье.

9. Из неравенств упражнения 8 следует, что

$$1 + \int_1^n x^p dx < 1^p + 2^p + \dots + n^p < n^p + \int_1^n x^p dx,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)n^p} &< \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} < \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}. \end{aligned}$$

Из последних неравенств легко получается исходное утверждение, так как пределы левой и правой частей двойного неравенства равны  $\frac{1}{p+1}$ .

10. Пусть  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ , а  $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .  
Докажите, что  $S_{2n} = H_{2n} - H_n$ .

Далее, в статье доказано, что  $H_n = \gamma + \ln n + \epsilon_n$ , где  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .  
Следовательно,

$$S_{2n} = \gamma + \ln 2n + \epsilon_n - \gamma - \ln n - \epsilon_n = \ln 2 + \alpha_n,$$

где  $\alpha_n = \epsilon_{2n} - \epsilon_n \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2,$$

а отсюда уже сразу следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$ , поскольку

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0.$$

11. а)  $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^n$ ; б)  $\sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^n$ ; в)  $\sqrt{2} \left(\frac{4n}{e}\right)^n$ . Воспользуй-  
тесь тем, что  $(n+1)(n+2)\dots(2n) = (2n!)/n!$ .

12. Пусть в колоде  $4n$  карт. Общее число различных спосо-  
бов выбора  $2n$  карт равно  $C_{4n}^{2n}$ . Из  $2n$  красных (черных) карт  
 $n$  карт можно выбрать  $C_{2n}^n$  способами, поэтому общее число  
выбора  $n$  черных карт равно  $(C_{2n}^n)^2$ . Следовательно, искомая  
вероятность равна  $\frac{(C_{2n}^n)^2}{C_{4n}^{2n}} = \frac{((2n)!)^4}{(4n)!(n!)^4}$ .

Выразив факториалы по формуле Стирмина, получаем после  
несложных преобразований

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Для колоды из 52 карт получим

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{26}} \approx 0,22,$$

т.е. около  $\frac{1}{5}$ . Предвидеть такой результат наскладку было бы  
весьма трудно.

НАПЕЧАТАНО В 2015 ГОДУ

	№ журнала	с.		№ журнала	с.
<b>Памяти В.А.Лешковцева</b>	<b>3</b>	6	О методе раскраски на примере одной задачи.		
<b>Памяти С.М.Козела</b>	<b>1</b>	50	<i>Д.Кузнецов</i>	<b>3</b>	25
<b>Статьи по математике</b>			Ребусы про «Квант». <i>Л.Штейнгарц</i>	<b>2</b>	25
Диаграммы Юнга и $q$ -комбинаторика. <i>Е.Смирнов</i>	<b>1</b>	7	С этажа на этаж. <i>И.Акулич</i>	<b>4</b>	26
Интеграл и оценки сумм. <i>А.Егоров</i>	<b>4</b>	6	Эксперимент не удался. <i>И.Акулич</i>	<b>3</b>	24
Метод множителей Лагранжа. <i>М.Горелов</i>	<b>5-6</b>	8	Статьи по физике		
Об одной «олимпиадной» задаче про графы расстоя- ний. <i>А.Райгородский, Л.Шабанов</i>	<b>3</b>	7	Деревянная лошадка и сила трения. <i>С.Дворянинов</i>	<b>4</b>	24
Собери квадрат. <i>С.Дориченко</i>	<b>2</b>	6	Про волчок и гироскоп. <i>С.Дворянинов</i>	<b>1</b>	28
<b>Статьи по физике</b>			<b>Калейдоскоп «Кванта»</b>		
Два графа. <i>Е.Соколов</i>	<b>1</b>	2	Математика		
Мыльные пузыри в фотографиях. <i>Л.Севистов</i>	<b>4</b>	2	Калейдоскоп в калейдоскопе	<b>1</b>	32
Поверхностное натяжение: нанотехнологии и плаваю- щий шарик. <i>А.Князев</i>	<b>3</b>	2	Каскады из правильных многогранников	<b>3</b>	«
Физика – материалы, параметры, альтернативное. <i>Л.Ашкинази</i>	<b>2</b>	2	Чертим кривые второго порядка!	<b>5-6</b>	48
Экспериментальная физика высоких энергий. <i>Э.Боос, Л.Дудко</i>	<b>5-6</b>	2	Физика		
<b>Новости науки</b>			Геометрия и оптика	<b>2</b>	32
Да будет свет! <i>Л.Белопухов</i>	<b>1</b>	13	Оптика и геометрия	<b>4</b>	«
<b>Из истории науки</b>			<b>Школа в «Кванте»</b>		
Великая и ужасная ядерная энергия <i>А.Варламов,</i> <i>Ж.Виллен, А.Ризамонти</i>	<b>3</b>	11	Математика		
<b>Задачник «Кванта»</b>			Отрезки, прямоугольники и ... комбинаторика.		
Задачи М2366 – М2405, Ф2373 – Ф2412	<b>1-5-6</b>		<i>В.Голубев, П.Кожевников</i>	<b>1</b>	39
Решения задач М2349 – М2388, Ф2355 – Ф2394	<b>1-5-6</b>		Физика		
Симметрические многочлены и делимость на $p^s$ . <i>И.Вайнштейн</i>	<b>5-6</b>	23	А что это холод на землю упал... <i>А.Стасенко</i>	<b>3</b>	28
<b>«Квант» для младших школьников</b>			Гольфстрим, или Как Гренландия согревает Европу. <i>А.Стасенко</i>	<b>5-6</b>	30
Задачи	<b>1-5-6</b>		Как воздух сопротивляется движению тела. <i>А.Стасенко</i>	<b>1</b>	35
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»	<b>1, 4, 5-6</b>		Кошачья экономия. <i>И.Акулич</i>	<b>2</b>	31
XX Летний турнир имени А.П.Савина	<b>1</b>	30	Кулинарные исследования. <i>Е.Соколов</i>	<b>5-6</b>	31
XXI Турнир математических боев имени А.П.Савина	<b>4</b>	28	Отрицательная обратная связь. <i>А.Стасенко</i>	<b>3</b>	29
Статьи по математике			Радужное рассеяние. <i>В.Сыщенко</i>	<b>1</b>	36
Буратино и его научная работа. <i>И.Бояринов</i>	<b>2</b>	26	Сила в один буратино <i>С.Дворянинов</i>	<b>2</b>	30
Как дятел Спятел планировал отпуск. <i>К.Кохась</i>	<b>5-6</b>	28	<b>Физический факультатив</b>		
			Бестормозные космические корабли-невидимки. <i>А.Андреев, А.Панов</i>	<b>4</b>	30
			Линии магнитного поля – простые и сложные. <i>И.Горбатый, Д.Эпиктетов</i>	<b>3</b>	34
			Поверхностное натяжение, капля и Вселенная. <i>А.Стасенко</i>	<b>5-6</b>	35
			Поле и линии поля. <i>А.Рыбаков</i>	<b>2</b>	35



	№ журнала	с.
Резиновый шарик, надутый гелием. <i>С.Варламов</i>	1	41
Угол смачивания и энергия взаимодействия молекул. <i>С.Варламов</i>	5-6	37
<b>Математический кружок</b>		
Абстрактная математика волейбольного турнира. <i>М.Горелов</i>	2	38
Задачи и теоремы о представителях. <i>А.Романов</i>	1	44
Каких больше – острых или тупых? <i>Г.Корбулон</i>	3	41
Мальчики, девочки, таблицы, графы... <i>Е.Бакаев</i>	3	37
Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника. <i>Е.Бакаев, П.Кожевников, И.Яковлев</i>	5-6	41
Симедиана. <i>Ю.Блинков</i>	4	35
<b>Лаборатория «Кванта»</b>		
Камера-обскура в вашем доме. <i>А.Андреев, А.Панов</i>	5-6	46
Между зеркалами. <i>А.Андреев, А.Панов</i>	1	42
Сломанный грифель. <i>А.Бердников</i>	3	31
<b>Наши наблюдения</b>		
Несколько новых иллюстраций к «Алисе в Зазеркалье». <i>А.Андреев</i>	2	28
<b>Практикум абитуриента</b>		
Математика		
Алгебраический расчет в задачах на построение. <i>Л.Штернберг</i>	2	47
Физика		
Задачи с экстремумами. <i>А.Черноуцан</i>	1	46
Источник в цепи постоянного тока. <i>А.Черноуцан</i>	4	39
Кинематика отрезка. <i>Е.Соколов</i>	3	43
Уравнение теплового баланса. <i>А.Черноуцан</i>	2	42
ВП по имени Центр масс. <i>М.Бондаров</i>	5-6	50
<b>Олимпиады</b>		
Заключительный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике	5-6	58
Заключительный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по физике	5-6	61
Избранные задачи LXXVIII Московской математической олимпиады	4	44
Избранные задачи LXXX Санкт-Петербургской олимпиады по математике	1	52
LVI Международная математическая олимпиада	5-6	64
XXIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»	3	50
XXII Международная олимпиада «Туймаада». Математика	5-6	70
XXII Международная олимпиада «Туймаада». Физика	5-6	71
XLVI Международная физическая олимпиада	5-6	65
Московская физическая олимпиада 2015 года	4	46
Региональный этап XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике	2	49
Региональный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по физике	2	51
Региональный этап Олимпиады имени Максвелла	2	50
XXXVI Турнир городов. Задачи весеннего тура	4	43
XXXVI Турнир городов. Задачи осеннего тура	1	50
<b>Рецензии и библиография</b>		
«Математическая составляющая»	5-6	56
<b>Информация</b>		
Заочная школа СУНЦ НГУ	3	47

	№ журнала	с.
Заочной физико-технической школе при МФТИ – 50 лет	5-6	78
Московская математическая конференция школьников	3	54
Очередной набор в ВЗМШ	5-6	73
<b>Смесь</b>		
Вниманию наших читателей	4	22
Глиняные гири	3	22
Рекордсмен под Новый год	1	53
<b>Коллекция головоломок</b>		
Встреча в углу	4	2-я с.обл.
Многогранник Силашши	5-6	«
Симптомино	2	«
Три пятиугольника	3	«
<b>Кванты интернета</b>		
130 лет первому российскому математическому плакату	1	2-я с.обл.
<b>Шахматная страничка</b>		
В городе Сочи шахматные ночи	1	3-я с.обл.
Мельница на шахматной доске	5-6	«
Партии – лауреаты	2	«
Пешки и геометрия	4	«
Эпоха Бориса Спасского	3	«
<b>Прогулки с физикой</b>		
Алиса в Зазеркалье	2	4-я с.обл.
Как закаляется сталь?	3	«
Капли на плоской поверхности	5-6	«
Тиксотропия – что это?	1	«
Фотографии мыльных пузырей	4	«

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## ПЕШКИ И ГЕОМЕТРИЯ

Сегодняшняя «страничка» посвящена простейшему соотношению сил на доске — две пешки против одной (конечно, не считая королей). Но это и одно из самых интересных окончаний. Несмотря на незамысловатый материал, придумано множество занятных этюдов, важных для практики. И в них, как мы убедимся, решающее значение имеет геометрическое понятие — оппозиция.



Г. Нейштадт, 1890

### Ничья

Эта старинная позиция служит хорошей иллюстрацией оппозиции.

1. ♔h1! Тонкий ход, все остальное ведет к фиаско, например: 1. ♔f1? ♔d2 2. ♔f2 ♔d3 3. ♔g3 ♔e3 4. ♔g2 ♔e2 5. ♔g3 ♔f1 6. ♔g4 ♔f2.

1... ♔d2. Если 1... ♔c1, то 2. ♔g1! ♔g4 3. ♔g2! ♔d2 4. fg.

2. ♔h2! ♔e2 3. ♔g2! ♔e3 4. ♔g3 ♔d3 5. ♔h3! Ничья.



Г. Матисон, 1918

### Ничья

Известно, что у проходной пешки имеются «ключевые» поля, попав на которые, король обеспечивает ее проведение. Эти поля располагаются через одну горизонталь от проходной. Борьба за них тоже ведется с помощью оппозиции. В данном случае белые пешки обречены, а ключевые поля пешки f7, которая станет проходной, находятся на пятой горизонтали, и черный король готов занять их.

1. g6! fg. Приходится брать пешкой, что смещает ключевые поля на гори-

зонталь ниже. Но это только полдела. При 2. ♔g2? ♔g4 3. f5 gf 4. ♔h2 ♔f3 черные успевают на ключевые поля, а в случае 2. ♔h2 ♔g4 3. f5 прорываются на них после 3... ♔:f5! 4. ♔g3 ♔g5 5. ♔h3 ♔f4 и т.д.

2. f5! gf 3. ♔g1! Черному королю предлагается первому занять четвертую горизонталь. 3... ♔g5 4. ♔f1! ♔g4 5. ♔g2 с ничьей.



Н. Григорьев, 1936

### Выигрыш

1. ♔d4! Теперь возникают два варианта с разными идеями.

а) 1...c5+ 2. ♔:c5 ♔g3! 3. a4! e5 4. a5 e4 5. ♔d4! ♔f4! 6. a6 e3 7. ♔d3! ♔f3 8. a7 e2 9. a8 ♖+ с победой.

б) 1...e5+ 2. ♔:e5 ♔e3 3. a4 ♔d3 4. a5 c5 5. a6 c4 6. a7 c3 7. a8 ♖ c2. При короле на d2 была бы ничья, но его позиция неудачна. 8. ♖d5+! ♔e2 9. ♖a2! ♔d1 10. ♔d4 c1 ♖ 11. ♔d3!, и все кончено. Или 8... ♔e3 9. ♖g2! c1 ♖ 10. ♖g5+ с выигрышем.



И. Фритц, 1951

### Выигрыш

Черный король близко к пешкам, но справиться с ними не успевает. 1. ♔f7! Естественный ход 1. ♔e7? не годится из-за 1... ♔f2! 2. e4, и сам король мешает маршу пешки к восьмой горизонтали. Недостаточно и 1. ♔d7, так как после 1... ♔f2! 2. e4 c3 3. e5 ♔e3 4. e6 ♔d2 5. e7 ♔:c2 6. e8 ♖ ♔d2 возникает теоретическая ничья.

1...c3. Теперь 1... ♔f2 проигрывает: 2. e4 c3 3. e5 ♔e3 4. e6 ♔d2 5. e7 ♔:c2 6. e8 ♖ ♔d2 7. ♖d8+ ♔c1 8. ♖g5+, и пешка «с» не успела сделать еще один шаг (6... ♔d1 7. ♖d8+! ♔e1 8. ♖g5+).

2. ♔e6! ♔f2 3. ♔d5! ♔:e2 4. ♔c4 ♔d2 5. ♔b3!, и все становится ясно.



М. Зинар, 1981

### Выигрыш

Не годится 1. ♔e7? ♔c4 2. e4 ♔:c3!, и собственный король мешает движению белой пешки. Или 1. ♔f7? ♔d5! 2. ♔f6 ♔c4! 3. e4 ♔:c3 4. e5 c5, и король опять стал помехой.

1. ♔g7! Странный ход, но только он решает. 1... ♔d5! 2. ♔f7! ♔e5 3. ♔e7 ♔d5! 4. ♔d7! ♔c4 5. ♔c6! ♔:c3 6. ♔c5! Победа.



Н. Григорьев, 1936

### Выигрыш

1. ♔g3! ♔e4 2. ♔g2! ♔e3 3. ♔f1 ♔e4 4. ♔e1 ♔e3 5. ♔d1 ♔f4 6. ♔d2 ♔e4 7. e3 ♔f3 8. ♔d3 ♔g3 9. ♔e4 ♔g4 10. ♔e5 ♔:h4 11. ♔f4 ♔h3 12. e4 ♔g2 13. e5! h4 14. e6 h3 15. e7 h2 16. e8 ♖ h1 ♖ 7. ♖e2+ ♔g1 18. ♔g3, и все кончено.

Примечательно, что этот этюд победил на крупном международном конкурсе (по теме «король и две пешки против короля с пешкой»).



А. Мандлер, 1929

### Выигрыш

1. ♔g6! ♔a6 2. ♔g7! ♔a7! Черные сохраняют дальнюю оппозицию, но... 3. ♔g8! ♔a8! 4. c5! dc 5. e5 c4 6. e6 c3 7. e7 c2 8. e8 ♖+ с выигрышем.

Е. Гук





## КАПЛИ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Уроки с физикой*



Конечно же, вам не раз доводилось видеть капли жидкости на твердой поверхности. И вы не могли не заметить, что чем меньше капли по размеру, тем ближе их форма к шарообразной.

(Продолжение – на с. 37 внутри журнала)